

**UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA UTEC**

**Carrera de Ingeniería Mecánica**



**SIMULACIÓN ESTÁTICA DE UN PUENTE  
PEATONAL DE FIBRA DE VIDRIO  
STATIC SIMULATION OF A FIBERGLASS  
PEDESTRIAN BRIDGE**

Tesis para optar el título profesional de Ingeniero Mecánico

**Jared Torrejón Guerrero**

**Código 201210200**

**Asesor**

**José Luis Mantari Laureano**

Lima –Perú

Noviembre 2019

La tesis

**SIMULACIÓN ESTÁTICA DE UN PUENTE PEATONAL DE FIBRA DE VIDRIO**

Ha sido aprobada

-----  
[-----]

-----  
[-----]

-----  
[-----]

*Dedicatoria:*

En primer lugar, a Dios. A mis queridos padres, William por todo su apoyo y a mi madre Sonia, que fueron los pilares de mi esfuerzo para culminar mi carrera profesional y a toda mi familia que con simples acciones me motivaron a seguir adelante.

*Agradecimientos:*

Al grupo de investigación, quienes me alinearon en el desarrollo de mi tesis en especial a Iván Ramos, Joao Monge, Misael y al profesor PhD. José Luis Mantari por su asesoría. Y a la jefatura donde laboro por su motivación y consejos.

# TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
RESUMEN .....	ix
INTRODUCCION.....	x
<b>CAPÍTULO 1: ESTADO DEL ARTE .....</b>	<b>5</b>
1.1 <i>Generalidades</i> .....	5
1.2 <i>Teorías de vigas</i> .....	8
1.3 <i>Modelamiento Numérico</i> .....	10
1.3.1 <i>Teoría clásica</i> .....	10
1.3.2 <i>Teoría unificada</i> .....	11
1.3.3 <i>Modelamiento por capa simple equivalente (ESL)</i> .....	14
1.3.4 <i>Modelamiento por múltiples capas</i> .....	15
<b>CAPÍTULO 2: NORMATIVA Y ESCANTILLAMIENTO DE UN PUENTE PEATONAL</b>	<b>16</b>
2.1 <i>Puente peatonal de material compuesto</i> .....	16
2.1.1 <i>Diseño de cargas</i> .....	16
2.1.2 <i>Deflexión</i> .....	17
2.1.3 <i>Frecuencias naturales</i> .....	18
2.1.4 <i>Esfuerzos permisibles</i> .....	19
2.1.5 <i>Espesor mínimo del FRP</i> .....	19
2.1.6 <i>Conexiones</i> .....	19
2.2 <i>Barandas para peatones</i> .....	19
2.2.1 <i>Geometría</i> .....	19
2.3 <i>Escantillamiento del Puente Peatonal</i> .....	20
2.3.1 <i>Cálculo del panel</i> .....	20
2.3.2 <i>Cálculo del rigidizador</i> .....	22
<b>CAPÍTULO 3: MODELAMIENTO DE UNA VIGA USANDO UNA TEORIA REFINADA</b>	<b>25</b>
3.1 <i>Introducción</i> .....	25
3.2 <i>Ecuaciones Gobernantes</i> .....	26
3.3 <i>Formulación unificada con notación de elementos finitos</i> .....	30

3.3.1	Variación virtual de la energía de deformación .....	30
3.3.2	Funciones de forma .....	31
3.4	<i>Matriz de masa</i> .....	36
3.5	<i>Vector Fuerza</i> .....	37
3.6	<i>Cuadratura de gauss para funciones de forma con un eje de coordenada</i> .....	38
3.7	<i>Método de conectividad por polinomios de Lagrange</i> .....	39
3.7.1	Introducción .....	39
3.7.2	Coordenada normalizada en la sección transversal.....	39
3.7.3	Formulación isoparamétrico.....	41
<b>CAPÍTULO 4: COMPORTAMIENTO MECANICO DE UN PUENTE PEATONAL</b>		
<b>MEDIANTE EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS.....</b>		<b>44</b>
4.1	<i>Layout preliminar del puente peatonal</i> .....	44
4.2	<i>Requerimientos geométricos</i> .....	45
4.3	<i>Puente peatonal vista general</i> .....	50
4.4	<i>Condiciones de contorno</i> .....	51
4.4.1	Apoyos .....	51
4.4.2	Aplicación de la Carga .....	53
4.5	<i>Presentación y análisis de la simulación por el método de elementos finitos.</i> .....	54
4.5.1	Mallado.....	54
4.6	<i>Análisis de resultados y discusión</i> .....	56
4.6.1	Análisis de desplazamiento de la carga peatonal .....	56
4.6.2	Análisis del desplazamiento de la carga del viento .....	65
4.6.3	Análisis de los resultados de esfuerzos .....	67
<b>CONCLUSIONES .....</b>		<b>70</b>
<b>RECOMENDACIONES.....</b>		<b>71</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>		<b>72</b>
<b>ANEXOS.....</b>		<b>75</b>

# ÍNDICE DE TABLAS

	<b>Pág.</b>
Tabla 1.1 Ventajas y desventajas de los materiales compuestos.....	7
Tabla 2.1 Deflexión y coeficientes de aspecto de ratio.....	22
Tabla 2.2 Corrección de curva para el panel.....	22
Tabla 2.3 Corrección de curva para el rigidizador.....	23
Tabla 4.1 Propiedades mecánicas del GFRP usado en el puente peatonal.....	45
Tabla 4.2 Propiedades geométricas del rigidizador.....	47
Tabla 4.3 Propiedades mecánicas del material rotado.....	49
Tabla 4.4 Grados de libertad en $x=8$ metros.....	52
Tabla 4.5 Comparación de tamaño de malla.....	55
Tabla 4.6 Calidad de malla para 450303 grados de libertad.....	56
Tabla 4.7 Valores de desplazamientos en nodos superiores [4, y, 0.16027].....	58
Tabla 4.8 Valores de desplazamientos en diferentes nodos [4, 0.83011, z].....	60
Tabla 4.9 Valores de desplazamiento en diferentes nodos [6, y, z].....	62
Tabla 4.10 Valores de desplazamiento en diferentes nodos.....	64
Tabla 4.11 Desplazamientos en la cara lateral del puente peatonal.....	66
Tabla 4.12 Esfuerzos de la estructura.....	68
Tabla 4.13 Esfuerzos normales en el eje longitudinal sin viento.....	69

# ÍNDICE DE FIGURAS

	<b>Pág.</b>
Figura 1.1 Casa de adobe y piedra de forma cuadrada.....	5
Figura 1.2 Componentes viga en una caza.....	6
Figura 1.3 Palas del rotor de un aerogenerador.....	7
Figura 1.4 Puente de plástico reforzado con fibra.....	8
Figura 1.5 Problema de flexión de vigas de Leonardo da Vinci .....	9
Figura 1.6 Ballesta desarrollada por Leonardo da Vinci.....	10
Figura 1.7 Deformación de una viga de Timoshenko comparada con las de Euler-Bernoulli....	11
Figura 1.8 Polinomios de Taylor vía el triángulo de pascal .....	12
Figura 1.9 Campo deformación del ESL con el Zigzag .....	15
Figura 1.10 Campo deformación presentada en un LW.....	15
Figura 2.1 Deformación para compuesto .....	18
Figura 2.2 Dimensiones estandarizadas del panel.....	21
Figura 2.3 Dimensiones estandarizadas del rigidizador .....	23
Figura 3.1 Ubicación en el eje de coordenadas .....	26
Figura 3.2 Comportamiento mecánico de un material .....	27
Figura 3.3 Comportamiento lineal de la función de forma, dos nodos por elemento .....	32
Figura 3.4 Comportamiento cuadrático de la función de forma, tres nodos por elemento .....	32
Figura 3.5 Comportamiento cúbico de la función de forma, cuatro nodos por elemento. ....	33
Figura 3.6 Esquema de ensamble de los nodos en la matriz de rigidez .....	35
Figura 3.7 Esquema de ensamble de elementos en la matriz de rigidez .....	35
Figura 3.8 Esquema de ensamble de la matriz de rigidez global .....	36
Figura 3.9 Posición de los componentes de carga dentro del vector fuerzas nodal .....	38
Figura 3.10 Elemento Lagrange de cuatro nodos (L4) en geometría real y normalizada .....	40
Figura 3.11 Elemento Lagrange de nueve nodos (L9) en geometría real y normalizada.....	41
Figura 4.1 Layout del puente peatonal .....	44
Figura 4.2 Dimensiones del rigidizador (unidades en mm) .....	46
Figura 4.3 Visualización de la estructura del puente peatonal .....	48
Figura 4.4 Sección transversal extruida en DesignModeler de ANSYS. ....	49
Figura 4.5 Parte con diferentes propiedades mecánicas.....	50

Figura 4.6 Vista general de puente peatonal .....	50
Figura 4.7 Apoyo fijo.....	51
Figura 4.8 Carga viva peatonal .....	53
Figura 4.9 Vista superficial de la malla estructurada .....	55
Figura 4.10 Orthogonal Quality .....	56
Figura 4.11 Aspect ratio.....	56
Figura 4.12 Tendencia desplazamiento de los nodos de la sección transversal .....	57
Figura 4.13 Desplazamiento $uz$ del extremo del panel en $y=1.005$ m.....	59
Figura 4.14 Distribución de los desplazamientos $uy$ $[4,0.830, Z]$ .....	61
Figura 4.15 Distribución de desplazamiento $ux$ a lo largo de un rigidizador $[6,-0.510, Z]$ .....	63
Figura 4.16 Tendencia desplazamiento de los nodos de la sección transversal con presión peatonal y de viento .....	65
Figura 4.17 Distribución de desplazamiento $uy$ en $[4,0.830, Z]$ .....	67

## ANEXOS

Anexo 1 Valores de los pesos y puntos de Gauss respectivamente .....	76
Anexo 2 Plano de la estructura del puente peatonal.....	77
Anexo 3 Plano de la baranda.....	78
Anexo 5 Plano de los sujetadores intermedios.....	79
Anexo 6 Plano de los sujetadores laterales .....	80
Anexo 7 Código general.....	81
Anexo 8 Mesh1d .....	105
Anexo 9 Gauss_points.....	106
Anexo 10 Shapefunction .....	107
Anexo 11 x_int.....	108
Anexo 12 thicknessfunction_L9.....	109
Anexo 13 thicknessfunction_L9_1.....	110
Anexo 14 thicknessfunction_L9_2.....	111
Anexo 15 sección_int.....	112
Anexo 16 sección_intf.....	113
Anexo 17 nucleo .....	114
Anexo 18 Ux .....	115
Anexo 19 Ux_x .....	116
Anexo 20 Ux_y .....	117
Anexo 21 Ux_z .....	118

## **RESUMEN**

El uso de materiales compuestos en estos últimos años ha estado presente en el diseño y fabricación de varias estructuras tales como los puentes, esto es debido a sus excelentes propiedades mecánicas comparado a los materiales convencionales. Sin embargo, su avance dentro de la industria ha sido limitado por la falta de conocimiento en el diseño y un método para el análisis del comportamiento estructural.

En la presente tesis, se realizará el estudio del comportamiento estático de una estructura tipo puente peatonal hecha de materiales compuestos mediante la teoría de elementos finitos. Del mismo modo, los lineamientos necesarios para calcular el puente peatonal, determinar la deformación máxima, los límites de esfuerzos y factores de seguridad de la estructura fueron obtenidos de la guía de especificaciones para el diseño de puentes peatonales de FRP de la norma AASHTO [1] y la ISO 12215-05 [2]. El uso de elementos finitos para el análisis fue enfocado utilizando una formulación unificada utilizando polinomios de LaGrange de elementos de nueve nodos que permite interpolar el campo desplazamiento y predecir con exactitud los desplazamientos; además, por la simplicidad del método el costo computacional es bajo comparado con los modelos 2D (placa/ Shell) o 3D (sólido).

La estructura peatonal obtenida cumple con la normativa impuesta por AASHTO, con una deflexión máxima de 8.1 mm soportando carga peatonal, carga muerta y la del viento. Además, los resultados de desplazamiento obtenidos por la formulación unificada utilizando polinomios de LaGrange son valores aproximados al ANSYS usando menos grados de libertad, teniendo un costo computacional bajo.

### **PALABRAS CLAVES:**

Deflexión, Esfuerzos, FRP, Elementos finitos, Formulación unificada, Polinomios.

# INTRODUCCION

Durante muchos años todo proyecto de construcción estaba dominado por los materiales convencionales llamándose así los metales y hormigón siendo un recurso usado para cubrir las necesidades de ingeniería. El proceso de elaboración y ensamble son muy laborioso y se gasta mucha energía, por lo cual durante los siglos XX y XXI se han estado desarrollando métodos para el uso de productos compuestos [3] que dan solución a esta problemática.

Actualmente, existe el rápido reemplazo de los metales convencionales por parte de los materiales compuesto esto es debido por las propiedades superiores tales como el alto módulo de elasticidad por unidad de peso (módulo específico) y la resistencia por unida de peso (resistencia en específica). Esto permite que el peso de los componentes pueda reducirse dando un mayor rendimiento y que las piezas móviles sean fáciles de transportar [4].

El material compuesto mayormente usado en las aplicaciones de ingeniería es la fibra reforzada con plástico, la razón es porque según el requerimiento que se tenga las propiedades mecánicas puedes ser controladas por medio de la orientación de las fibras. Las fibras que son cortas y son orientadas aleatoriamente producen propiedades isotrópicas y las de ordenamiento unidireccionales con fibras largas producen propiedades anisotrópicas con resistencia y rigidez paralelas a las fibras [5]. Esta ventaja permite obtener mayor resistencia a la deflexión y es muy usada en la fabricación de vigas para puentes peatonales.

La presente tesis busca simular un puente peatonal de fibra de vidrio que cumpla con las restricciones de deflexión máxima para el uso en zonas alejadas (rurales) en el cual no se requiera constante mantenimiento y que la instalación sea rápida. Por lo cual, se realizó un estudio acerca del uso de materiales compuestos en puentes peatonales de acuerdo con requerimientos geométricos y de deflexión máxima, además de las cargas combinadas (viento y peatonal) a la que es sometida para obtener un factor de seguridad según normativa.

## **Alcance**

En la presente tesis se simuló un puente peatonal de fibra de vidrio de ancho 2.010 metros para el paso de personas en ambas direcciones, la longitud de la estructura es de 8 metros de largo. El estudio de este puente está basado en el paso peatonal por ríos en provincias del Perú.

La investigación abarcó el uso de una teoría refinada como método de evaluación para la estructura, los resultados obtenidos por esta innovadora forma de solución son únicamente los desplazamientos máximos que en este caso sean menores a 16 mm y que los esfuerzos resultantes sean 25 % menores a los del material [1]. Estos resultados son los necesarios para la validación de la estructura estáticamente según la norma AASHTO.

Los resultados obtenidos mediante la teoría refinada implementada se corroboran con los resultados del software ANSYS. El escantillamiento del puente peatonal es obtenido por una norma basada en relaciones geométricas, donde se calculó las dimensiones del panel y de los rigidizadores. Actualmente, no existen lineamientos necesarios para establecer dimensiones estándares en el área civil para materiales compuestos.

## **Antecedentes**

En el mundo, existen diversos puentes peatonales que están deteriorados; debido a que muchos de ellos se han convertido deficientes estructuralmente por no haberse dado un adecuado mantenimiento o haber excedido su vida útil de diseño. Una falta de mantenimiento y la superación de la vida útil de diseño generalmente resultan en el daño de la estructura por corrosión y agrietamiento por fatiga.

Por ello, el uso de materiales compuestos en la actualidad específicamente en los puentes peatonales ha sido objeto de estudio. Su alta propiedad a la resistencia química, mecánica y larga vida útil por fatiga de los materiales compuestos [3] incentiva al reemplazo de los materiales convencionales usados en construcción como el hormigón y en las estructuras metálicas tales como el acero.

El hecho de analizar materiales compuestos, en puentes peatonales, requiere realizar distintos modelamientos para un correcto funcionamiento de la estructura. El estudio se realiza con un software comercial, que obtiene excelentes resultados aproximados de deformación y esfuerzos; sin embargo, la discretización suele ser engorrosa por las diferentes geometrías de las secciones. En consecuencia, el costo computacional de simulación suele ser elevado, con el objetivo de disminuirlo se usan modelos refinados que permitan obtener los mismos resultados aproximados considerando menor cantidad de elementos y nodos.

## **Justificación y motivación**

La solución propuesta es usar polímeros reforzados con fibra de vidrio, con el objetivo de aumentar la vida útil de un puente peatonal sin las evaluaciones [6] y mantenimiento correctivo anual; debido a que, los materiales compuestos son resistentes a la corrosión y a pesar que no a la radiación, la norma ASSTHO [1] determina un espesor mínimo que reduce la degradación por radiación. Por ello, la presente tesis se basa en el uso de materiales compuestos en puentes peatonales [7].

Para disminuir el costo computacional en el análisis de puentes peatonales de material compuesto, la simulación presentada en la presente tesis usa una teoría refinada modelo viga con polinomios de Lagrange. La teoría tiene mayores ventajas comparativas al utilizar menos grados de libertad y al excelente control de los desplazamientos de los nodos de la estructura, comparado a las soluciones comerciales como el ANSYS Workbench. La innovadora forma de simulación permite determinar las consideraciones necesarias para el análisis estático de un puente peatonal de FRP de una forma no convencional.

## **Objetivo General**

Estudiar el comportamiento estático de un puente peatonal reforzado de fibra de vidrio mediante el método de elementos finitos.

## **Objetivo Específico**

Definir los lineamientos para el diseño del puente peatonal de fibra de vidrio.

Calcular las dimensiones de la estructura del puente peatonal mediante normas de diseño del panel y del perfil sombrero.

Programar en el software Matlab para obtener resultados de desplazamientos y esfuerzos mediante el método de elementos finitos.

Evaluar los resultados de desplazamientos y esfuerzos del puente al ser sometidos a las cargas combinadas peatonal y del viento.

# CAPÍTULO 1: ESTADO DEL ARTE

## 1.1 Generalidades

Los materiales compuestos se han usado desde la antigüedad, el hombre neolítico halló que la combinación de la arcilla (barro) con agua se ablandaba y se endurecían a temperatura ambiente. Además, se dieron cuenta que cuando introducían a la hoguera los bloques de arcilla húmeda, estos bloques sufrían una transformación obteniendo como resultado el endurecimiento al enfriarse, pero con una característica adicional que era la resistencia al agua [8] de forma duradera. Por esta razón, sus asentamientos (ver Figura 1.1) estaban formados por chozas de forma circular o rectangular hechas de adobe y grava.



Figura 1.1 Casa de adobe y piedra de forma cuadrada  
Fuente: Evolución de la vivienda a lo largo de la historia [9]

Como vemos los materiales compuestos han sido usados desde la antigüedad, sin embargo, en la actualidad son aplicadas en industrias especializadas y específicas como en la aeronáutica y aeroespacial [10]. Esto es debido a su ligereza, con el objeto de disminuir el peso y ahorrar en el consumo de combustible al momento que la nave

empiece a despegar y en el trayecto de vuelo [10]. En la Figura 1.2, se observa que la estructura de una aeronave militar, en este caso un caza, está conformada por varios elementos vigas de diferentes perfiles, la geometría de cada perfil da propiedades diferentes de acuerdo con la necesidad [11]. Dependiendo de la dirección de las condiciones de carga, se puede aumentar la rigidez y de esta manera reducir los desplazamientos en aquella dirección, además la cantidad de rigidizadores impuestas dentro de la estructura reduce los esfuerzos que se generan, es debido por una existente distribución de las fuerzas.

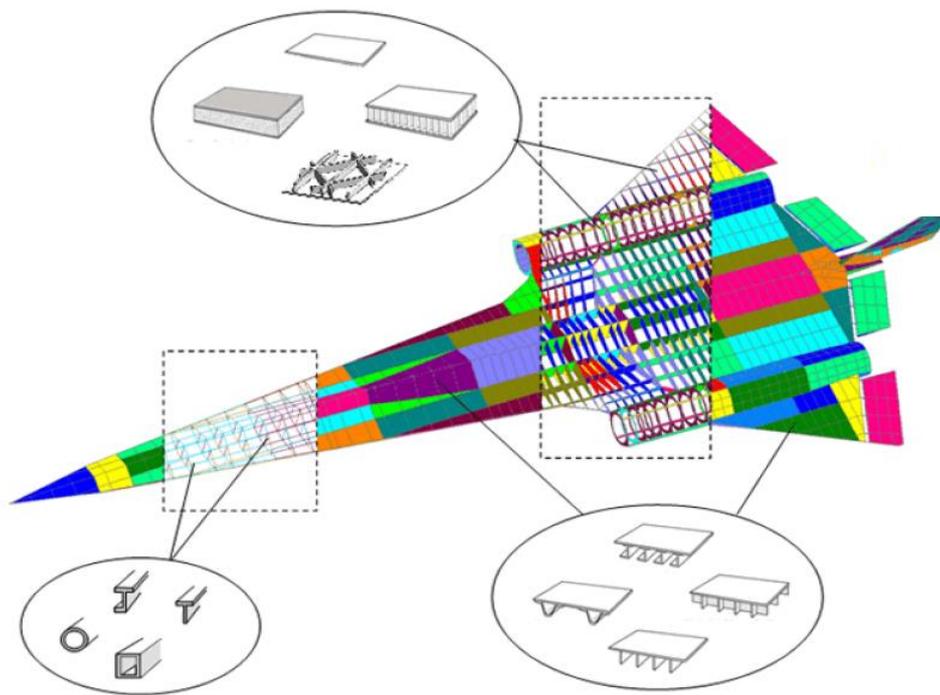


Figura 1.2 Componentes viga en una caza  
Fuente: Wenbin Yu. Mechanics of structure Genome [11]

Además, el uso del material compuesto se observa en otra aplicación, como el sector de la producción de energía. La mayoría de las palas del rotor de los aerogeneradores están fabricadas con fibra de FRP (ver Figura 1.3) también pueden ser fabricadas con fibra de carbono, pero actualmente son antieconómicas [12].



Figura 1.3 Palas del rotor de un aerogenerador  
Fuente: Aerogenerador energía Eólica [13]

Como antes visto, los materiales compuestos son usados en diferentes aplicaciones por sus excelentes propiedades mecánicas comparados a los materiales convencionales, en la Tabla 1.1 se menciona las ventajas y desventajas [14].

Ventajas	Desventajas
Bajo peso	Costo de material alto
Mantenimiento bajo	Costo de producción bajo
Larga vida a la fatiga	Baja rigidez
Resistente a la corrosión y fatiga	No hay deformación plástica
Producción e instalación modular	Sensible al fuego

Tabla 1.1 Ventajas y desventajas de los materiales compuestos  
Fuente: Elaboración propia [14]

Con el avance del tiempo y de la tecnología el uso de este tipo de materiales se expandió a otros sectores, como en el ámbito civil en donde se utilizan elementos vigas de material compuesto para la elaboración de puentes peatonales.

Uno de los proyectos que resalta las bondades de los materiales compuestos es el fabricado e implementado en Taiwán (ver Figura 1.4) en el cual se demostró que el diseño es económicamente competitivo comparado con las diferentes opciones tales como el uso del hormigón o estructura metálica, el peso reducido de esta estructura hace posible las construcciones en un taller para luego ser transportado a la obra directamente, permitiendo un costo inferior [15].

Además, la estructura construida con material compuesto tiene componentes relativamente sencillos como vigas principales, diafragmas, barra FRP y un panel que recibe directamente la carga peatonal.



Figura 1.4 Puente de plástico reforzado con fibra  
Fuente: Yeou-Fong Li et al. Case study of first all-GFRP pedestrian bridge in Taiwan [15]

## 1.2 Teorías de vigas

Los casos antes mencionados, hacen hincapié en el uso de materiales compuestos utilizando el modelo viga. En la actualidad existen muchas teorías para el análisis de esta estructura, pero el estudio de este tipo de elemento se inició con Leonardo da Vinci considerado el hombre universal.

La contribución de Leonardo da Vinci como científico e ingeniero tiene un gran impacto en la actualidad, dio los fundamentos sobre la teoría de estructuras de vigas. En el ámbito de la ciencia y de la construcción, habla de la resistencia de ménsulas, de arcos, soportes y deformación proponiendo conceptos con los que trata de describir todos los hechos que visualiza en su alrededor [16].

El problema de flexión de vigas de Leonardo a pesar de ser sencillo (ver Figura 1.5) llega a conclusiones muy acertadas, “*si una barra de 2 brazas de larga carga 10 libras, una braza de bastón del mismo espesor cargará 20*” [16] llega a la conclusión de que la resistencia de la barra varía inversamente con su longitud y directamente con el espesor.

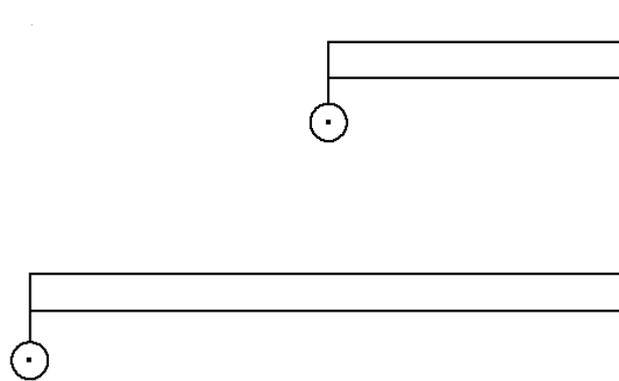


Figura 1.5 Problema de flexión de vigas de Leonardo da Vinci  
Fuente: Elaboración propia [16]

Da Vinci se dio cuenta de la correspondencia de fuerzas, es decir, identificó que se generan fuerzas internas en las barras al ser cargadas en su extremo, y lo explicó de la siguiente manera utilizando como referencia un herramienta de guerra (ver Figura 1.6) “*la fuerza que se crea en los cuerpos delgados y torcidos contra su naturaleza como las ballestas u otras máquinas parecidas que no se dejan plegar voluntariamente, y que cuando están cargadas desean volver a levantarse, y expulsan con furor, tan pronto como les es dada la libertad de hacerlo, lo que se oponía a su carrera*” [16]. De ahí el clásico nombre de flecha a la deformación.

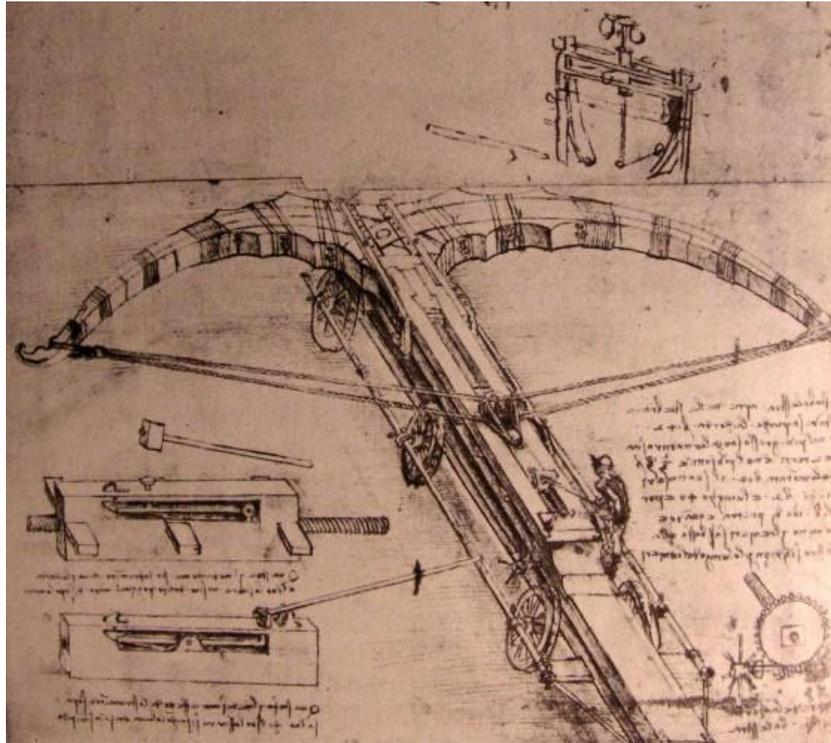


Figura 1.6 Ballesta desarrollada por Leonardo da Vinci  
Fuente: Leonardo's crossbow [17]

### 1.3 Modelamiento Numérico

#### 1.3.1 Teoría clásica

La teoría clásica de vigas fue inspirada por los trabajos de Leonardo Da Vinci quien fue precursor de los estudios de deformación en elementos tipo viga. Leonhard Euler y Daniel Bernoulli [18] profundizaron el análisis de deformaciones y llegaron a los siguientes principios:

Los desplazamientos verticales de todos los puntos son iguales a los del eje de la viga, el desplazamiento lateral es cero y la sección transversal es normal al eje de la viga, escrito de forma matemática se establece lo siguiente [19]:

$$u(x, y, z) = -z \tan \theta(x) = -z \frac{dw(x)}{dx} = -z\theta(x) \quad (1.1)$$

$$v(x, y, z) = 0 \quad (1.2)$$

$$w(x, y, z) = w(x) \quad (1.3)$$

El autor Timoshenko en el año 1922, incluyó una mejora por el efecto de corte en la teoría clásica de vigas; a través de una viga simplemente apoyada demostró que la mejora es cuatro veces más importante por la influencia de la inercia de rotación [19]. En la Figura 1.7, en la viga de Euler-Bernoulli, la sección transversal es perpendicular a la línea de flexión, mientras que la viga de Timoshenko presenta una rotación en la línea de intersección de la sección transversal y la línea flexión; debido a que, la rotación proviene de una deformación por corte, que no está incluida en la viga de Bernoulli. Por lo tanto, la viga de Bernoulli es más rígida. El error entre ambos modelos no es significativo, solo si la relación entre la longitud y el grosor es lo suficientemente grande.

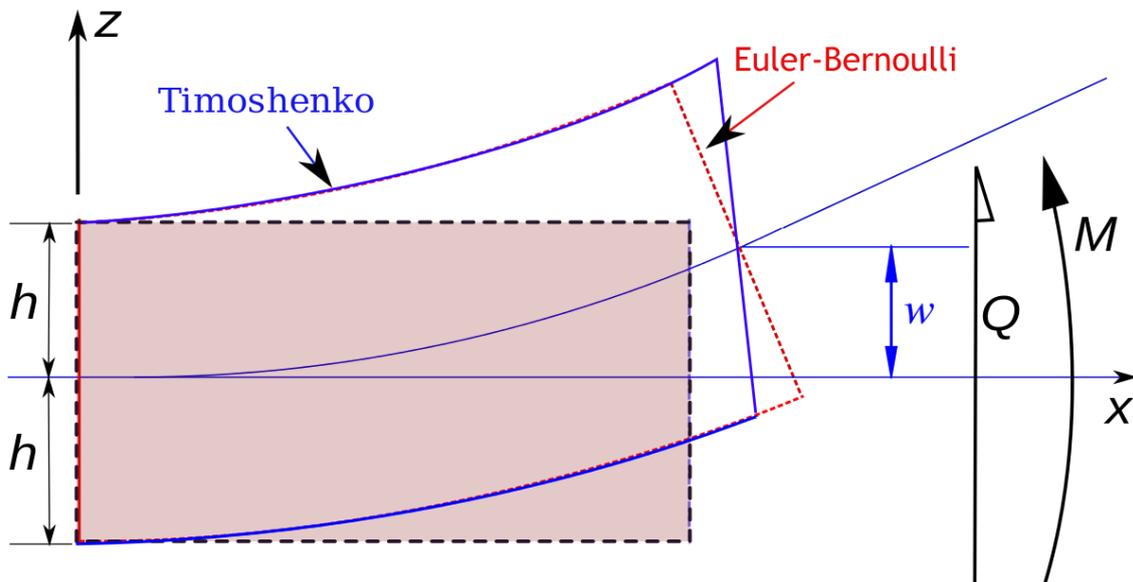


Figura 1.7 Deformación de una viga de Timoshenko comparada con las de Euler-Bernoulli.  
Fuente: Teoría de vigas de Timoshenko [19]

### 1.3.2 Teoría unificada

La teoría refinada evalúa diversos campos de desplazamiento en una sola codificación. Según el autor Carrera, el campo de desplazamiento está en función de dos parámetros, la función de expansión  $F_\tau(y, z)$  y las variables desconocidas  $u(x)$  que son los componentes del vector desplazamientos [20].

$$u(x, y, z) = F_\tau(y, z)u_\tau \quad \tau = 1, 2, \dots, N_u \quad (1.4)$$

Los modelos 1D CUF (Formulación unificada de Carrera) vistas se basan en dos clases de formulaciones de orden superior, la expansión tipo Taylor (TE) y la expansión tipo Lagrange (LE). La autora Catapano [21] usó la expansión tipo Taylor (ver Figura 1.8), donde presentó un análisis estático de una viga laminada de material compuesto de orientaciones de [90-0] en base a los coeficientes de rotación propuesta por el investigador Reddy [22], la importancia de la teoría es mostrar la predicción de componentes de esfuerzos cortantes y que el costo computacional es bajo comparado a la solución obtenida por el método de elementos finitos.

$N$	$N_u$	$F_\tau$
0	1	$F_1 = 1$
1	3	$F_2 = y \quad F_3 = z$
2	6	$F_4 = y^2 \quad F_5 = yz \quad F_6 = z^2$
3	10	$F_7 = y^3 \quad F_8 = y^2z \quad F_9 = yz^2 \quad F_{10} = z^3$
...	...	...
$N$	$\frac{(N+1)(N+2)}{2}$	$F_{\frac{(N^2+N+2)}{2}} = y^N F_{\frac{(N^2+N+4)}{2}} = y^{N-1} z \dots F_{\frac{N(N+3)}{2}} = yz^{N-1} F_{\frac{(N+1)(N+2)}{2}} = z^N$

Figura 1.8 Polinomios de Taylor vía el triángulo de pascal  
Fuente: Catapano et al. Static analysis of laminated beams via a unified formulation [21]

El valor de desplazamiento en cualquier punto está en función de la expansión de Taylor de orden superior ( $N$ ) y de un tipo de función ( $F_N$ ), que son mostrados en la Ecuación 1.5 hasta 1.7. La variable  $u_x, u_y, u_z$  representa el desplazamiento con respecto al eje de coordenadas [21].

$$\begin{aligned}
 u_x &= u_{x1} + u_{x2}y + u_{x3}z + \dots + u_{x\frac{(N^2+N+2)}{2}}y^N + \dots + u_{x\frac{(n+1)(n+2)}{2}}z^N \\
 u_y &= u_{y1} + u_{y2}y + u_{y3}z + \dots + u_{y\frac{(N^2+N+2)}{2}}y^N + \dots + u_{y\frac{(n+1)(n+2)}{2}}z^N \\
 u_z &= u_{z1} + u_{z2}y + u_{z3}z + \dots + u_{z\frac{(N^2+N+2)}{2}}y^N + \dots + u_{z\frac{(n+1)(n+2)}{2}}z^N \quad (1.5-1.7)
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones diferenciales son resueltas vía la solución de Navier [21]. Para una condición de simplemente apoyado. El siguiente desplazamiento armónico es adoptado:

$$\begin{aligned}
 u_x &= U_{x\tau} F_t(y, z) \cos(\alpha x) \\
 u_x &= U_{y\tau} F_t(y, z) \text{sen}(\alpha x) \\
 u_z &= U_{z\tau} F_t(y, z) \text{sen}(\alpha x) \quad (1.8-1.10)
 \end{aligned}$$

Dónde:

$$\alpha = \frac{m\pi}{l} \text{ con } m \in N/0 \quad (1.11)$$

El uso de la expansión tipo Taylor tiene algunas limitaciones, los términos de orden superior no tienen significado local, únicamente tienen propiedades de sección transversal.

La teoría usada en la presente tesis es desarrollada por los autores Carrera y Petrolo [23], quienes proponen la formulación refinada de orden superior tipo viga con solo variables desconocidas. Debido a que, usan polinomios de Lagrange se puede interpolar el campo desplazamiento en la sección transversal, estos polinomios pueden ser de cuatro (L4), nueve (L9), y dieciséis puntos (L16) polinomiales. Por ejemplo, en la Ecuación 1.12 hasta 1.14 se muestra el campo desplazamiento para un polinomio L9.

$$\begin{aligned} u_x &= F_1 u_{x_1} + F_2 u_{x_2} + F_3 u_{x_3} + F_4 u_{x_4} + F_5 u_{x_5} + F_6 u_{x_6} + F_7 u_{x_7} + F_8 u_{x_8} + F_9 u_{x_9} \\ u_y &= F_1 u_{y_1} + F_2 u_{y_2} + F_3 u_{y_3} + F_4 u_{y_4} + F_5 u_{y_5} + F_6 u_{y_6} + F_7 u_{y_7} + F_8 u_{y_8} + F_9 u_{y_9} \\ u_z &= F_1 u_{z_1} + F_2 u_{z_2} + F_3 u_{z_3} + F_4 u_{z_4} + F_5 u_{z_5} + F_6 u_{z_6} + F_7 u_{z_7} + F_8 u_{z_8} + F_9 u_{z_9} \end{aligned} \quad (1.12-1.14)$$

El método de elementos finitos (FEM), discretiza la viga en elementos que pueden contener diferentes cantidades de nodos, en cada nodo se encuentra la sección transversal con sus respectivos nodos como una especie de 2D y es proyectada en toda longitud como una extrusión, permitiendo obtener resultados aproximado al 3D [23].

$$u = N_i F_{\tau} q_{\tau i} \quad (1.15)$$

Donde  $N_i$  representa las funciones de forma y  $q_{\tau i}$  representa el vector desplazamiento nodal.

$$q_{\tau i} = \{ q_{u_{x_{ti}}} \quad q_{u_{y_{ti}}} \quad q_{u_{z_{ti}}} \}^T \quad (1.16)$$

La cantidad de grados de libertad en la estructura se obtiene por la multiplicación de la cantidad de nodos a lo largo de la viga [24], la cantidad de nodos que existen en la

sección transversal y por tres, esta última representa que cada nodo de la sección transversal contiene tres variables desconocidas perteneciente al desplazamiento en las tres direcciones.

Las características del uso de polinomios de Lagrange son las siguientes:

Las incógnitas del problema son desplazamientos físicos de traslación, es decir, representan el desplazamiento con respecto a las tres direcciones. Las incógnitas del problema se pueden colocar de manera física en la superficie del cuerpo, debido a que, representan el desplazamiento de cada nodo perteneciente a la sección transversal. Los cuerpos se discretizan con respecto a la sección transversal mediante el polinomio de Lagrange y la elección del tipo de polinomio depende de la geometría [23].

### **1.3.3 Modelamiento por capa simple equivalente (ESL)**

La capa equivalente utiliza solo una expansión para el campo desplazamiento usado en todo el espesor del laminado, este tipo de modelamiento es ampliamente utilizado para el análisis de flexión de una viga simplemente apoyado, compuesto laminado y sándwich. Estas se clasifican como teoría clásica de vigas, teoría de primer orden de deformación por cizallamiento, teorías de segundo y tercer orden basadas en la expansión de la serie Taylor [25].

La capa equivalente no puede modelar el esfuerzo cortante transversal en distintos tipos de laminaciones. Por ello, se generó una condición que permita que los campos de deformación se encuentren unidos para dicha interfaz. La solución a este problema es la condición Zigzag que se utiliza para modelar la distorsión local de la sección transversal en cada lámina de estructuras de múltiples láminas (ver Figura 1.9) y se relaciona con la continuidad de los esfuerzos transversales. Diversos investigadores han desarrollado modelos Zigzag [25] para el análisis de compuestos laminados y vigas en sándwich.

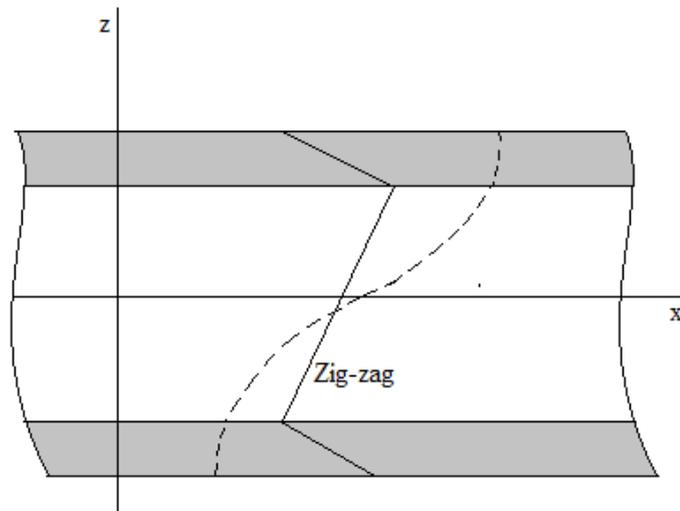


Figura 1.9 Campo deformación del ESL con el Zigzag  
Elaboración: Elaboración Propia [25]

### 1.3.4 Modelamiento por múltiples capas

La teoría de múltiples capas (LW), el campo de desplazamiento se aproxima por sub-laminas con continuidad y el desplazamiento es independiente de las coordenadas locales del espesor. Es decir, las variables desconocidas que son valores de desplazamiento pueden cambiar por cada sub-laminas debido a que las funciones de forma pueden ser diferentes en cada capa. El modelo comparado al ESL tiene como característica que la distribución respete la singularidad de cada capa. Debido a esto, un LW tiene la misma tendencia comparado a un ESL cuando se utiliza el método Zigzag (ver Figura 1.9 y Figura 1.10 ) [25].

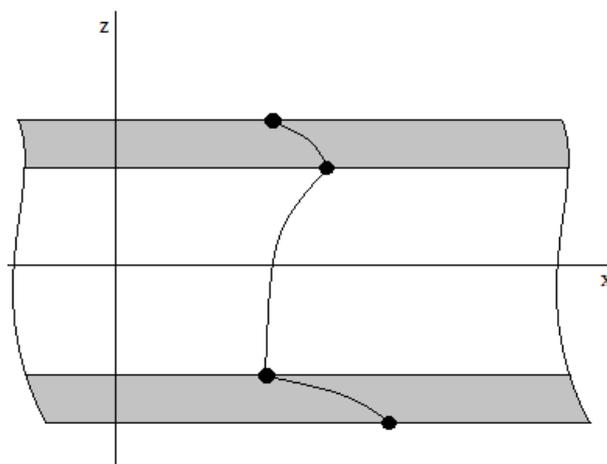


Figura 1.10 Campo deformación presentada en un LW  
Fuente: Elaboración propia [25]

## **CAPÍTULO 2: NORMARTIVA Y ESCANTILLAMIENTO DE UN PUENTE PEATONAL**

### **2.1 Puente peatonal de material compuesto**

Dentro de la variedad de aplicaciones de los materiales compuestos se analizará en el área civil, específicamente en el diseño de la estructura de un puente peatonal; por lo cual, se menciona las restricciones ofrecidas por la normativa ASSHTO y el uso de la norma ISO 12215-05 para determinar los lineamientos geométricos del panel y de la viga sombrero.

#### **2.1.1 Diseño de cargas**

##### **2.1.1.1 Carga viva y muerta**

La carga peatonal que actúa directamente en el área activa del puente peatonal tiene el valor de 4.07 KPa, representa una persona promedio ocupando una superficie de  $1.86 \text{ m}^2$ . Además, esta carga de servicio es razonablemente conservadora ya que es difícil superarla con un tráfico peatonal [1].

Si el área de la pasarela del puente peatonal donde se aplica la carga viva, donde circula los peatones, es superior a  $37.16 \text{ m}^2$  la carga peatonal se recalcula por medio de la siguiente ecuación [1]:

$$W = 85(0.25 + (\frac{15}{\sqrt{A1}})) \quad (2.1)$$

$W$  = Carga de diseño del puente (psf)

$A1$  = Área activa ( $\text{ft}^2$ )

Por la ecuación anterior se obtiene la carga de diseño, la carga viva peatonal no debe ser menor de 3.11 Kilopascasles por lo que se debe cumplir la siguiente restricción.

$$3.11 \text{ KPa} < W \quad (2.2)$$

Para el caso de la carga muerta, que actúa en todo momento, es necesario considerarlo; debido a que es intrínseco de la estructura. La Ecuación 2.3 presenta el cálculo del peso muerto.

$$\text{Carga distribuida del peso muerto} = \frac{\text{Carga del peso muerto}}{\text{Area activa}} (Pa) \quad (2.3)$$

### 2.1.1.2 Cargas del viento

El viento actúa de manera horizontal a la estructura del puente, impacta perpendicularmente al eje longitudinal de la estructura, la carga de viento es definido por la sección del componente a impactar [1].

$$\text{Para barras} = 75 \text{ psf ( 3.59 kPa)}$$

$$\text{Para vigas} = 50 \text{ psf ( 2.39 kPa)} \quad (2.4-2.5)$$

### 2.1.2 Deflexión

Los valores de deflexión para puentes de material compuesto son más liberales que los valores de deflexión para puentes con materiales convencionales, se determina en la norma AASHTO para los materiales convencionales que las deflexiones causadas por el tráfico de peatones debe ser menor que  $\frac{L}{1000}$  [1].

Para puentes peatonales de material compuesto se debe diseñar de manera que la desviación vertical debida a la carga viva de peatones y la desviación horizontal debida a la carga del viento que es lateral no debe exceder los  $\frac{L}{500}$  metros [1].

Para los puentes de FRP los valores de deflexión permitidos son mayores debido a sus características de alta resistencia y su bajo módulo de elasticidad. Debido a lo mencionado, los puentes compuestos tienden a estar a niveles muy bajos de esfuerzo en los límites de deflexión dado por AASHTO, por ello para aprovechar de mejor manera el

material compuesto, se aumenta la deflexión límite para tener esfuerzos más razonables junto con los criterios de servicio (ver Figura 2.1).

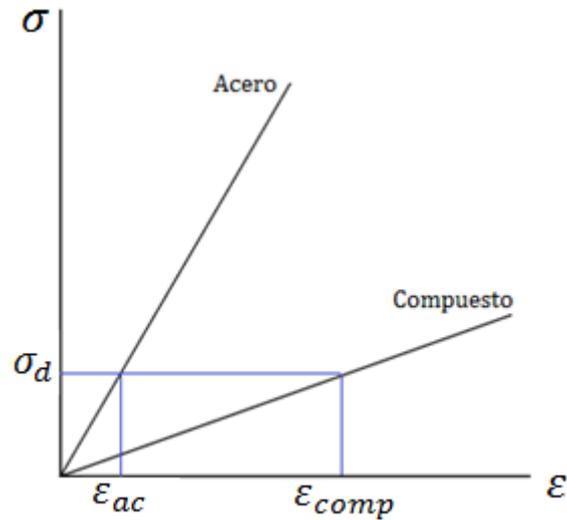


Figura 2.1 Deformación para compuesto  
Fuente: Elaboración Propia

### 2.1.3 Frecuencias naturales

Para puentes peatonales con baja rigidez y masa, la frecuencia fundamental del puente peatonal debe ser superior a 5 Hertz para evitar problemas relacionados con el primero y segundo armónico [1].

La frecuencia fundamental del puente peatonal, en la dirección horizontal, ha causado mucho problema, esto se debe a una relación alta de longitud/anchura por lo cual la frecuencias naturales deben ser superior a 3 Hz para evitar cualquier problema debido al movimiento de lado a lado que implica el primer y el segundo armónicos [1].

#### **2.1.4 Esfuerzos permisibles**

Los problemas de fatiga, es crítico en el diseño de acero, no se aplican a los puentes compuestos de FRP. Debido a su bajo módulo de elasticidad el diseño de los puentes cumple con los requisitos de capacidad de servicio al tiempo que presenta bajos niveles de esfuerzo; por lo cual, los valores permisibles de esfuerzos se limitarán al 25% de los valores de esfuerzos últimos del material [1].

#### **2.1.5 Espesor mínimo del FRP**

Los espesores mínimos de los miembros tubulares deben ser de 0,25 pulgadas (6,4 mm). El espesor mínimo de los elementos de FRP estructurales de placas será de 0,375 pulgadas (9,6 mm); dado que, el espesor normado minimiza la degradación del material por la radiación ultravioleta. [1].

#### **2.1.6 Conexiones**

De acuerdo con las especificaciones técnicas, el método de ensamble son conexiones atornilladas de acero galvanizado o inoxidable para todos los miembros principales y secundarios; también, la unión adhesiva se puede utilizar. Los miembros no estructurales pueden ser atornillados o adheridos [1].

### **2.2 Barandas para peatones**

#### **2.2.1 Geometría**

La altura mínima de las barandas para peatones es de 1060 mm, medidos a partir de la cara superior de la acera. Una baranda para peatones puede estar compuesta por elementos horizontales o verticales dependiendo de la necesidad. La abertura libre entre los elementos deberá ser tal que no permita el paso de una esfera 150 mm de diámetro.

Si se utilizan tanto elementos horizontales como verticales en la estructura de la baranda, la abertura libre de 150 mm se deberá aplicar a los 685 mm inferiores de la baranda medidos a partir de la cara superior de la acera, mientras que la separación en la

parte superior deberá ser tal que no permita el paso de una esfera de 200 mm de diámetro [26].

### **2.3 Escantillamiento del Puente Peatonal**

Para evaluar la estructura del puente peatonal es necesario definir la geometría, actualmente no hay consideraciones, en consecuencia, se recurre a normativas geométricas usadas en el área naval para el diseño de la estructura [2].

Por lo cual, en el presente capítulo se abordará los lineamientos necesarios para la generación de la estructura. De acuerdo con la norma geométrica ISO 12215-05 se presenta la fórmula de cálculo del panel que define el área activa que soportará la carga peatonal y también de los rigidizadores de perfil sombrero.

#### **2.3.1 Cálculo del panel**

El puente peatonal necesita de un componente que soporte inicialmente la carga de los peatones y defina el área activa. Por ello un panel que tiene un perfil constante es el adecuado para soportar la carga distribuida.

En la Figura 2.2 se muestra un esquema de las dimensiones estandarizadas del panel, la curvatura mostrada en el panel se debe a que los cálculos mostrados están basados en principios para el diseño de yates. Para el cálculo de un panel es necesario reemplazar el valor de la curvatura representado como “c” con el valor de cero.

El panel es la única parte de la estructura del puente peatonal que estará en contacto directo con la carga peatonal.

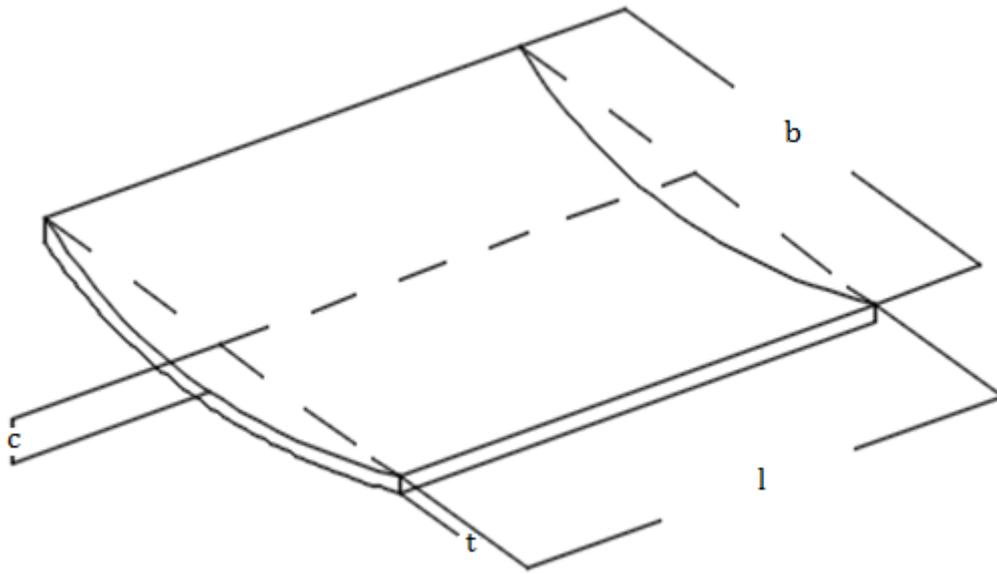


Figura 2.2 Dimensiones estandarizadas del panel  
 Fuente: Larsson, Eliasson R, Orych M. Principles of yacht design [2]

La ecuación para el cálculo del espesor del panel es el siguiente:

$$t = b * k_c \sqrt{\frac{P * K_2 * K_1}{1000 * \sigma_d}} \quad (2.6)$$

P= presión de referencia, KN.

b= ancho del panel, mm.

k1= coeficiente de deflexión permisible (usado solo para sándwich FRP).

k2=factor de aspecto de ratio (ver Tabla 2.1).

k3=factor de aspecto de ratio (usado solo para sándwich FRP).

$\sigma_d$ = esfuerzo mínimo de diseño permisible, 0.5 del esfuerzo último, MPa.

L= longitud del panel, mm.

C= profundidad del panel, mm.

Kc= curva de corrección (ver Tabla 2.2).

$l/b$	$k_2$	$k_3$
>2.0	0.500	0.028
>2.0	0.497	0.028
1.9	0.493	0.027
1.8	0.487	0.027
1.7	0.479	0.026
1.6	0.468	0.025
1.5	0.454	0.024
1.4	0.436	0.023
1.3	0.412	0.021
1.2	0.383	0.019
1.1	0.349	0.016
1.0	0.308	0.014

Tabla 2.1 Deflexión y coeficientes de aspecto de ratio  
Fuente: Larsson, Eliasson R, Orych M. Principles of yacht design [2]

El coeficiente  $k_1$  para sándwich FRP es de 0.017.

$c/b$	$k_c$
0 a 0.03	1.0
0.03 a 0.18	1.1 -3.33 $c/b$
>0.18	0.5

Tabla 2.2 Corrección de curva para el panel  
Fuente: Larsson, Eliasson R, Orych M. Principles of yacht design [2]

### 2.3.2 Cálculo del rigidizador

Además del panel, el componente que se opone más a la deformación de la estructura ocasionado por la carga peatonal es el rigidizador; debido a que, tiene mayor inercia comparada a los otros componentes.

Las dimensiones del rigidizador no se obtienen por medio de cálculos numéricos, sino, a través de requisitos de resistencia y rigidez, esto incluye restricciones de módulo de sección, momento de inercia y área de corte.

En la Figura 2.3, se limita la distancia lateral del panel a 10 veces el espesor de este, además de la restricción de la altura; esto es debido, para evitar el pandeo local de las partes del refuerzo. Las ecuaciones mostradas a continuación son proporcionadas por la Norma ISO 12215-05 [2]. Para el cálculo de módulo de sección, la siguiente ecuación permite determinar el mínimo valor que debe cumplir la estructura.

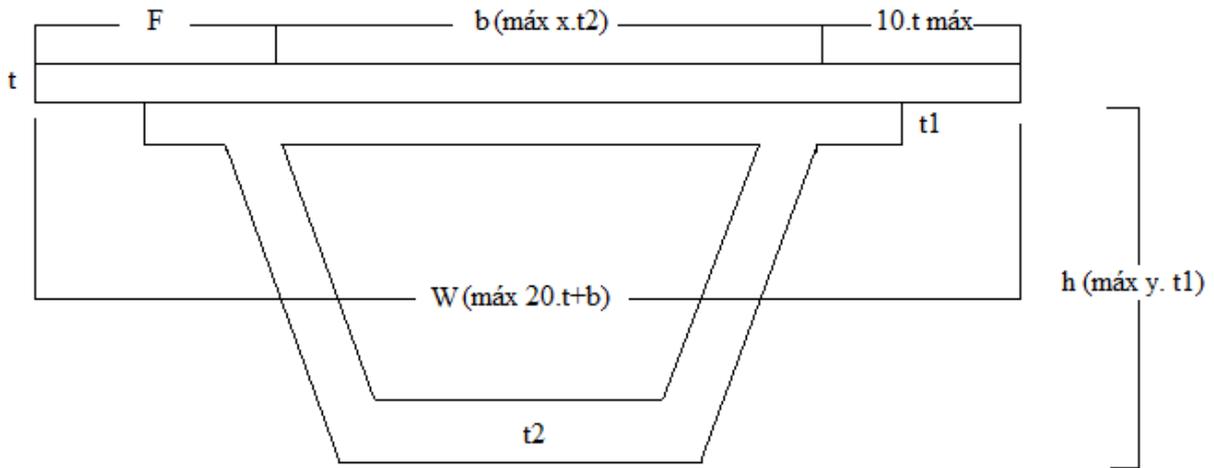


Figura 2.3 Dimensiones estandarizadas del rigidizador  
Fuente: Larsson, Eliasson R, Orych M. Principles of yacht design [2].

$$SM = \frac{83.3 * K_{cs} * P * s * l_u^2}{\sigma_d} * 10^{-9} [cm^3] \quad (2.7)$$

$P$ = Presión de diseño del rigidizador,  $\frac{kN}{m^2}$ .

$l_u$ = Longitud entre puntos de soporte, mm.

$s$ = Espacio de los rigidizadores, mm.

$K_{cs}$ = Corrección de curva, no menor que 0.5 ni mayor a 1 (ver Tabla 2.3).

$\sigma_d$  = Esfuerzo de diseño, 0.5 veces el esfuerzo último en  $\frac{N}{mm^2}$ .

$C_u$ = Corona de un refuerzo curvo, mm.

$C_u/l_u$	$K_{cs}$
0 a 0.03	1.0
0.03 a 0.18	1.1 - 1.33
➤ 0.18	0.5

Tabla 2.3 Corrección de curva para el rigidizador  
Fuente: Larsson, Eliasson R, Orych M. Principles of yacht design [2]

El momento de inercia del rigidizador se obtiene en asociación con el panel al que es sujeto, este valor no debe ser menor al valor resultante de la Ecuación 2.8 que utiliza consideraciones iniciales de diseño [2].

$$I = \frac{26 * K_{cs}^{1.5} * P * S * l u^3}{0.5 * E_{tc}} 10^{-11} [cm^4] \quad (2.8)$$

$E_{tc}$  = módulo de compresión o tensión.

Gracias a la Ecuación 2.9 se obtiene el mínimo valor del área cortante para la estructura de un solo rigidizador.

$$A_w = \frac{k_{sa} * P * S * l u}{\tau_d} 10^{-6} [cm^2] \quad (2.9)$$

$k_{sa} = 5$ , para el rigidizador atado a un panel.

$\tau_d$  = esfuerzo de diseño cortante, 0.5 veces el último esfuerzo cortante.

# CAPÍTULO 3: MODELAMIENTO DE UNA VIGA USANDO UNA TEORIA REFINADA

## 3.1 Introducción

La teoría de vigas es una herramienta muy usada para análisis estructurales, debido a su simplicidad y su bajo costo computacional comparada a modelos 2D (placas) o modelos 3D. La teoría de vigas es muy usada para evaluar cuerpos esbeltos como las alas de los aviones, cuchillas del rotor del helicóptero y puentes que son delgados. Entre la más conocidas y usadas para comparar es de Euler [27], sucedido por EBBM, y Timoshenko [28].

Para el análisis de profundidad, espesores delgados y vigas con secciones abiertas es necesario mejores métodos [29], uno de ellos es el polinomio de Lagrange [23] que evalúa cualquier geometría transversal por medio de las funciones de forma y mediante el cálculo de interpolación se puede obtener las variables desconocidas. La metodología usada es por elementos finitos, debido a que proporciona una solución numérica aproximada sobre una estructura dividiendo en un número de elementos interconectados entre sí a través de nodos comunes.

Para obtener resultados 3D para un elemento viga es necesario dividir a lo largo del eje una cierta cantidad de elementos con diferentes cantidades de nodos, por ejemplo, de dos nodos (B2), tres nodos (B3), cuatro nodos (B4) y en la sección transversal se puede obtener la discretización usando polinomios de Lagrange (L2), (L3), (L4), (L6), (L9) y (L16), donde tomarán la forma de la sección transversal. Las funciones de forma que están inicialmente en coordenadas reales se modifican en ambos casos para que este con respecto a coordenadas normalizadas, por esa razón la integración es de -1 a +1 usando conjuntamente el jacobiano. Para resolver la integración se utiliza la cuadratura de gauss para no operarlas sino reemplazarlas por una sumatoria, esto sucede sustituyendo la variable que esta con respecto a las coordenadas normalizas con puntos de gauss multiplicado con su respectivo peso de gauss (ver Anexo 1).

### 3.2 Ecuaciones Gobernantes

Para evaluar el elemento viga, es indispensable determinar las coordenadas dentro del cual se ubicará la viga; por lo cual, en la Figura 3.1 se presenta los ejes que contienen a la sección transversal, los límites de la viga en el eje  $x$ , es decir la longitud, son de  $0 < x < L$ . El vector campo desplazamiento, que contiene a las variables desconocidas, está en función de los tres ejes de dirección y de manera compacta es expresada en la Ecuación 3.1 [23].

$$u(x, y, z) = \{u_x \ u_y \ u_z\}^T \quad (3.1)$$

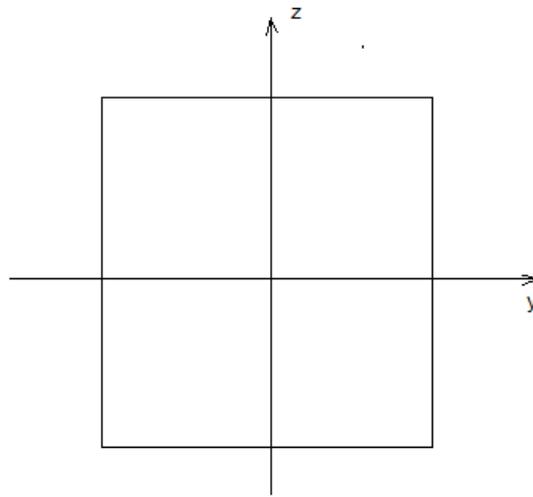


Figura 3.1 Ubicación en el eje de coordenadas  
Fuente: Elaboración propia

La letra  $T$  dentro del campo de desplazamiento significa un operador de transposición. Para la relación de esfuerzo y deformación se utiliza la hipótesis del comportamiento elástico lineal del material, es decir, la ley de Hooke (ver Figura 3.2). La relación se cumple solo cuando se evalúa en la zona elástica, si se desea evaluar en la zona plástica se utilizaría otro método que no es mencionada en esta tesis [22].

$$\sigma = C\varepsilon \quad (3.2)$$

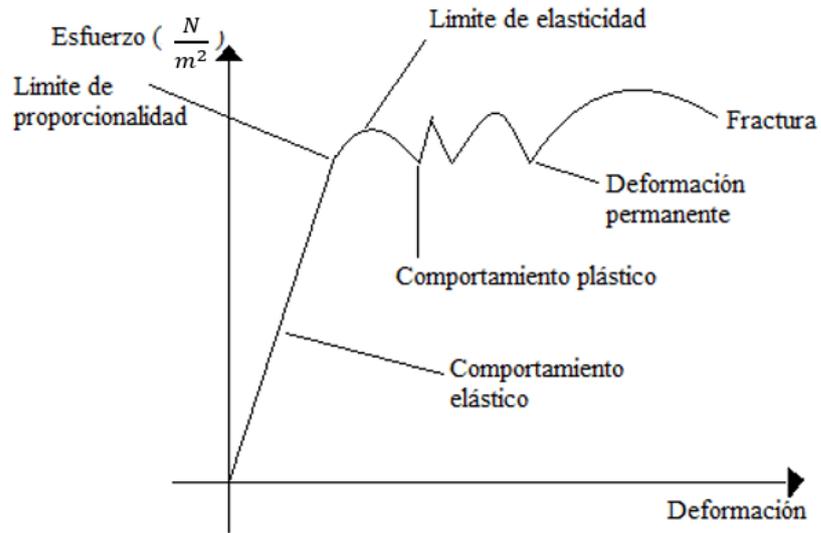


Figura 3.2 Comportamiento mecánico de un material  
Fuente: Elaboración propia [30]

La relación general de esfuerzo y deformación se debe gracias a los coeficientes de rigidez en la cual están ordenadas en una matriz de seis columnas y seis filas. El arreglo de los coeficientes de rigidez varía con respecto al tipo de material, para el caso de material ortotrópico, que se analizará en la presente tesis, se consideran algunos coeficientes de rigidez como cero [22].

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

La expresión  $C_{ij}$ , representan los coeficientes de rigidez, está en función de las propiedades mecánicas tales como el módulo de elasticidad ( $E_1, E_2, E_3$ ) y módulo de cizallamiento ( $G_1, G_2, G_3$ ).

Los valores de coeficientes de poisson están en función de la relación de módulos de elasticidad y se calcula de la siguiente manera [22]:

$$\nu_{21} = \frac{E_2 \nu_{12}}{E_1}$$

$$\begin{aligned}
\nu_{31} &= \frac{E_3 \nu_{13}}{E_1} \\
\nu_{32} &= \frac{E_3 \nu_{23}}{E_2}
\end{aligned} \tag{3.4-3.6}$$

El valor de  $\Delta$  se obtiene por la Ecuación 3.7 que relaciona los coeficientes de poisson con los módulos de elasticidad [22].

$$\Delta = \frac{(1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13})}{E_1 E_2 E_3} \tag{3.7}$$

Luego, se presenta en las siguientes ecuaciones la dependencia de los coeficientes de rigidez con las propiedades mecánicas del material [22].

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} \\
C_{12} = C_{21} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} \\
C_{13} = C_{31} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} \\
C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \\
C_{23} = C_{32} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \\
C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}
\end{aligned} \tag{3.8-3.13}$$

Los valores de los coeficientes  $C_{44}$ ,  $C_{55}$  y  $C_{66}$  son iguales a los módulos de corte.

$$\begin{aligned}
C_{44} &= G_{23} \\
C_{55} &= G_{13} \\
C_{66} &= G_{12}
\end{aligned} \tag{3.14-3.16}$$

Los componentes del esfuerzo ( $\sigma$ ) y deformación ( $\epsilon$ ) son agrupadas de la siguiente manera [20]:

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \{ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{yz} \}^T \\ \epsilon_p &= \{ \epsilon_{yy} \ \epsilon_{zz} \ \epsilon_{yz} \}^T \\ \sigma_n &= \{ \epsilon_{xx} \ \epsilon_{xy} \ \epsilon_{xz} \}^T \\ \epsilon_n &= \{ \epsilon_{xx} \ \epsilon_{xy} \ \epsilon_{xz} \}^T\end{aligned}\tag{3.17-3.20}$$

Las suscripciones tanto como "n" y "p" representan en términos de sección transversal y términos ligados a planos que son ortogonales a la sección transversal. La relación de desplazamiento y deformación lineal (deformación elástica) son agrupadas de la siguiente manera [20].

$$\begin{aligned}\epsilon_p &= D_p u \\ \epsilon_n &= D_{np} u + D_{nx} u\end{aligned}\tag{3.21-3.22}$$

Dónde  $D_p$ ,  $D_{np}$  y  $D_{nx}$  son matrices de operadores diferenciales expresada de la siguiente manera:

$$D_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad D_{np} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D_{nx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}\tag{3.23-3.25}$$

$$\sigma_p = C_{pp} \epsilon_p + C_{pn} \epsilon_n\tag{3.26}$$

$$\sigma_n = C_{np} \epsilon_p + C_{nn} \epsilon_n\tag{3.27}$$

Las matrices  $C_{pp}$ ,  $C_{pn}$ ,  $C_{np}$  y  $C_{nn}$  son expresadas y ordenadas de la siguiente manera:

$$C_{pp} = \begin{bmatrix} C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{23} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$C_{pn} = C_{np}^T = \begin{bmatrix} C_{12} & 0 & 0 \\ C_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$C_{nn} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

En donde al resolver las ecuaciones anteriores se obtiene todos los esfuerzos, que son expresadas en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= C_{12}u_{y,y} + C_{13}u_{z,z} + C_{11}u_{x,x} \\ \sigma_{yy} &= C_{22}u_{y,y} + C_{23}u_{z,z} + C_{12}u_{x,x} \\ \sigma_{zz} &= C_{23}u_{y,y} + C_{33}u_{z,z} + C_{13}u_{x,x} \\ \sigma_{yz} &= C_{44}u_{x,z} + C_{44}u_{z,y} \\ \sigma_{xz} &= C_{55}u_{x,z} + C_{55}u_{z,x} \\ \sigma_{xy} &= C_{66}u_{x,y} + C_{66}u_{y,x} \end{aligned} \quad (3.31-3.36)$$

### 3.3 Formulación unificada con notación de elementos finitos

#### 3.3.1 Variación virtual de la energía de deformación

El principio de desplazamiento virtual es usado para derivar el elemento matriz de rigidez y el vector cargas externas, la ecuación está en función de una variacional, esfuerzos y deformaciones. Se interpreta que toda deformación es causada por una fuerza externa y matemáticamente se puede expresar como [20] :

$$\delta L_i = \int_1 \left( \int_{\Omega} \delta \epsilon_n^T \sigma_n \partial \Omega \right) \partial x + \int_1 \left( \int_{\Omega} \delta \epsilon_p^T \sigma_p \partial \Omega \right) \partial x$$

$$\delta L_i = \int_1 \left( \int_{\Omega} \delta(D_{np}u + D_{nx}u)^T (C_{np}\varepsilon_p + C_{nn}\varepsilon_n) \partial\Omega \right) \partial x + \int_1 \left( \int_{\Omega} \delta(D_p u)^T (C_{pp}\varepsilon_p + C_{pn}\varepsilon_n) \partial\Omega \right) \partial x$$

$$\delta L_i = \int_1 \int_{\Omega} \{ \delta u^T (D_{np} + D_{nx})^T (C_{np}D_p + C_{nn}D_{np} + C_{nn}D_{nx})u + \delta u^T (D_p)^T (C_{pp}D_p + C_{pn}D_{np} + C_{pn}D_{nx})u \} \partial\Omega \partial x \quad (3.37-3.39)$$

Para elementos finitos se utiliza la siguiente notación para el desplazamiento donde  $\tau$  y  $s$  son subíndices que permiten armar la matriz rigidez.

$$\delta u(x, y, z) = \delta F_{\tau}(y, z) N_{i(x)} q_{\tau i} \quad (3.40)$$

$$u(x, y, z) = F_s(y, z) N_{j(x)} q_{s j} \quad (3.41)$$

### 3.3.2 Funciones de forma

Las funciones de forma son importantes en el método de elementos finitos, puesto que permite transformar las coordenadas rectangulares a coordenadas normalizadas con un nuevo eje de coordenadas de -1 a +1 para una fácil integración. Un método fácil y sistemático para calcular cualquier función de forma de cualquier orden es mediante productos simples de polinomios apropiados en las dos coordenadas y es expresada en la siguiente ecuación [31].

$$l_k^n(\xi) = \frac{(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1) \dots (\xi - \xi_{k-1})(\xi - \xi_{k+1}) \dots (\xi - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_0)(\xi_k - \xi_1) \dots (\xi_k - \xi_{k-1})(\xi_k - \xi_{k+1}) \dots (\xi_k - \xi_n)} \quad (3.42)$$

Para obtener las funciones de forma a lo largo de un elemento es necesario usar la fórmula solamente para un eje, donde los elementos viga con dos (B2), tres (B3) y cuatro (B4) nodos están en función de un nuevo eje de coordenadas que es el  $r$ .

Para elementos con dos nodos las funciones de forma están representadas en la Ecuación 3.43 hasta 3.44 y su comportamiento lineal es visto en la Figura 3.3 [20].

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - r), \quad N_2 = \frac{1}{2}(1 + r) \quad (3.43-3.44)$$

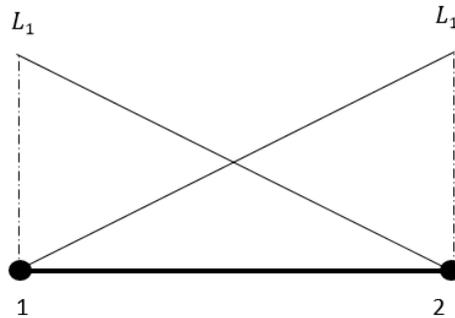


Figura 3.3 Comportamiento lineal de la función de forma, dos nodos por elemento  
Fuente: Elaboración propia [24].

Para elementos con tres nodos, las funciones de forma son las vistas en la Ecuación 3.45 hasta el 3.47, además el comportamiento que presenta a lo largo de los tres nodos es cuadrático y es representado en la Figura 3.4 [24]:

$$N_1 = \frac{1}{2}r(r - 1), \quad N_2 = (1 + r)(1 - r) \quad N_3 = \frac{1}{2}r(r + 1), \quad (3.45-3.47)$$

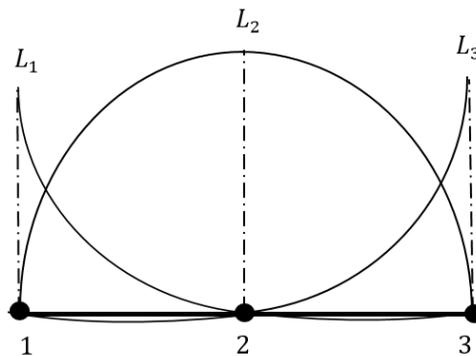


Figura 3.4 Comportamiento cuadrático de la función de forma, tres nodos por elemento  
Fuente: Elaboración propia [24]

Para elementos con cuatro nodos, las funciones de forma son de grado tres. La Ecuación 3.48 hasta la 3.51 representan matemáticamente y su comportamiento cúbico es visto en la Figura 3.5 [24].

$$N_1 = -\frac{9}{16}\left(r + \frac{1}{3}\right)\left(r - \frac{1}{3}\right), \quad N_4 = \frac{9}{16}\left(r + \frac{1}{3}\right)(r + 1),$$

$$N_2 = +\frac{27}{16}(r + 1)\left(r - \frac{1}{3}\right)(r - 1), \quad N_3 = -\frac{27}{16}(r + 1)\left(r + \frac{1}{3}\right)(r - 1), \quad (3.48-3.51)$$

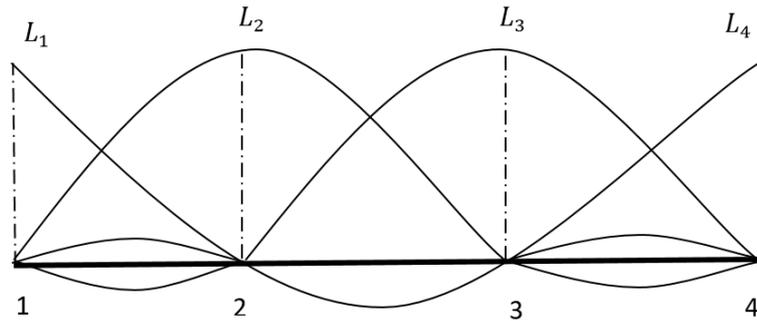


Figura 3.5 Comportamiento cúbico de la función de forma, cuatro nodos por elemento.  
Fuente: Elaboración propia [24]

El rango de la coordenada natural ( $r$ ) de  $-1$  a  $+1$  indica la posición del nodo dentro de las condiciones naturales de contorno. La cantidad de nodos por elemento depende de la longitud de la sección. La elección de la cantidad total de elementos y de la cantidad de nodos por elementos te definen la cantidad de nodos existentes (ver Ecuación 3.52).

$$DOF_s = [(N_{NE} - 1) * N_{BE} + 1] \quad (3.52)$$

$N_{NE}$ = número de nodos por elemento

$N_{BE}$ = número de elementos en la viga

A la anterior ecuación se le implementa la notación de elementos finitos y se convierte a la siguiente expresión [24]:

$$\begin{aligned} \delta L_i = \int_l \int_{\Omega} \{ & D_{np}^T F_{\tau} N_i q_{\tau i} (C_{np} D_p + C_{nn} D_{np} + C_{nn} D_{nx}) F_s N_j q_{sj} + \\ & D_{nx}^T F_{\tau} N_i q_{\tau i} (C_{np} D_p + C_{nn} D_{np} + C_{nn} D_{nx}) F_s N_j q_{sj} + D_p^T F_{\tau} N_i q_{\tau i} (C_{pp} D_p + C_{pn} D_{np} + \\ & C_{pn} D_{nx}) F_s N_j q_{sj} \} \partial \Omega \partial x \end{aligned} \quad (3.53)$$

La variación virtual de la energía deformación es separada de la siguiente manera:

$$\delta L_i = \delta q_{\tau i}^T K^{ij\tau s} q_{sj} \quad (3.54)$$

De manera extendida se puede observar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \delta L_i = \delta q_{\tau i}^T [ \int_l \int_{\Omega} \{ (D_{np}^T F_{\tau} N_i) (C_{np} D_p + C_{nn} D_{np} + C_{nn} D_{nx}) F_s N_j + D_{nx}^T F_{\tau} N_i (C_{np} D_p + \\ C_{nn} D_{np} + C_{nn} D_{nx}) F_s N_j + D_p^T F_{\tau} N_i (C_{pp} D_p + C_{pn} D_{np} + C_{pn} D_{nx}) F_s N_j \} \partial \Omega \partial x ] q_{sj} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Separando solo  $K^{ij\tau s}$  :

$$\begin{aligned} K^{ij\tau s} = \int_l \int_{\Omega} \{ (D_{np}^T F_{\tau} N_i) (C_{np} D_p F_s N_j + C_{nn} D_{np} F_s N_j) + (D_{np}^T F_{\tau} N_i) (C_{nn} F_s N_{j_x}) + \\ F_{\tau} N_{i_x} (C_{np} D_p F_s N_j + C_{nn} D_{np} F_s N_j + C_{nn} F_s N_{j_x}) + (D_p^T F_{\tau} N_i) (C_{pp} D_p F_s N_j + \\ C_{pn} D_{np} F_s N_j + C_{pn} F_s N_{j_x}) \} \partial \Omega \partial x \quad (3.56) \end{aligned}$$

El término  $K^{ij\tau s}$ , representa la matriz de rigidez en forma del núcleo fundamental y sus componentes son nueve que son los siguientes, donde el eje longitudinal es x:

$$K_{11} = C_{66} \int_{\Omega} F_{\tau_y} F_{s_y} d\Omega \int_1 N_j N_i dx + C_{55} \int_{\Omega} F_{\tau_z} F_{s_z} d\Omega \int_1 N_j N_i dx + C_{11} \int_{\Omega} F_{\tau} F_s d\Omega \int_1 N_{j_x} N_{i_x} dx$$

$$K_{12} = C_{12} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s_y} d\Omega \int_1 N_{j_x} N_i dx + C_{66} \int_{\Omega} F_{\tau_y} F_s d\Omega \int_1 N_j N_{i_x} dx$$

$$K_{13} = C_{13} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s_z} d\Omega \int_1 N_{j_x} N_i dx + C_{55} \int_{\Omega} F_{\tau_z} F_s d\Omega \int_1 N_j N_{i_x} dx$$

$$K_{21} = C_{12} \int_{\Omega} F_{\tau_y} F_s d\Omega \int_1 N_j N_{i_x} dx + C_{66} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s_y} d\Omega \int_1 N_{j_x} N_i dx$$

$$K_{22} = C_{22} \int_{\Omega} F_{\tau_y} F_{s_y} d\Omega \int_1 N_j N_i dx + C_{44} \int_{\Omega} F_{\tau_z} F_{s_z} d\Omega \int_1 N_j N_i dx + C_{66} \int_{\Omega} F_{\tau} F_s d\Omega \int_1 N_{j_x} N_{i_x} dx$$

$$K_{23} = C_{23} \int_{\Omega} F_{\tau_y} F_{s_z} d\Omega \int_1 N_j N_i dx + C_{44} \int_{\Omega} F_{\tau_z} F_{s_y} d\Omega \int_1 N_j N_i dx$$

$$K_{31} = C_{13} \int_{\Omega} F_{\tau_z} F_s d\Omega \int_1 N_j N_{i_x} dx + C_{55} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s_z} d\Omega \int_1 N_{j_x} N_i dx$$

$$K_{32} = C_{23} \int_{\Omega} F_{\tau_z} F_{s_y} d\Omega \int_1 N_j N_i dx + C_{44} \int_{\Omega} F_{\tau_y} F_{s_z} d\Omega \int_1 N_j N_i dx$$

$$K_{33} = C_{44} \int_{\Omega} F_{\tau_y} F_{s_y} d\Omega \int_1 N_j N_i dx + C_{33} \int_{\Omega} F_{\tau_z} F_{s_z} d\Omega \int_1 N_j N_i dx + C_{55} \int_{\Omega} F_{\tau} F_s d\Omega \int_1 N_{j_x} N_{i_x} dx$$

(3.57-3.65)

Los cuatro subdominios  $(\tau, s, i \text{ y } j)$  son explotados para ensamblar la matriz de rigidez.  $\tau$  y  $s$  son relacionadas con funciones de expansión ( $F_\tau$  y  $F_s$ ) y el núcleo fundamental es hallada con la variación de estas mismas. La posición de cada bloque de  $\tau s$  en la matriz de rigidez está dado por la Figura 3.6 hasta la Figura 3.8 [20].

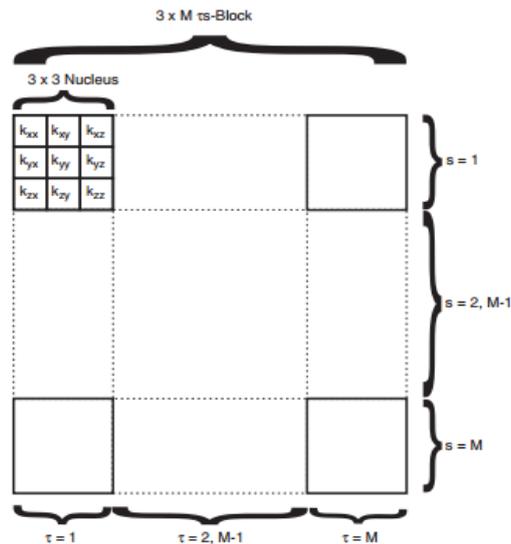


Figura 3.6 Esquema de ensamblaje de los nodos en la matriz de rigidez  
Fuente: Carrera E. Beam Structures: Classical and Advanced Theories [20]

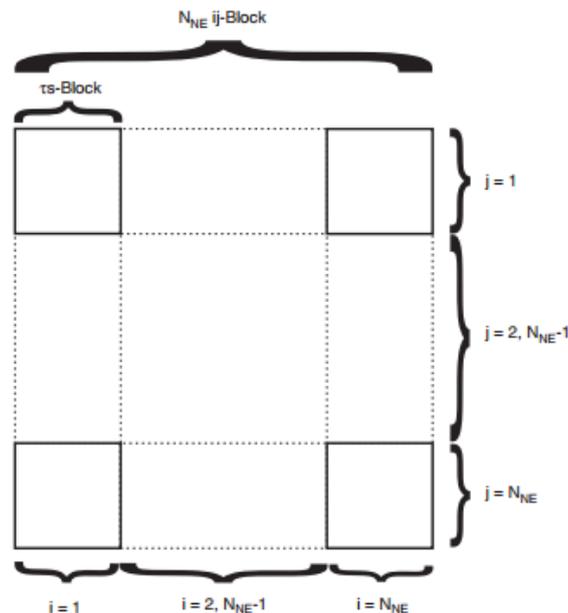


Figura 3.7 Esquema de ensamblaje de elementos en la matriz de rigidez  
Fuente: Carrera E. Beam Structures: Classical and Advanced Theories [20]

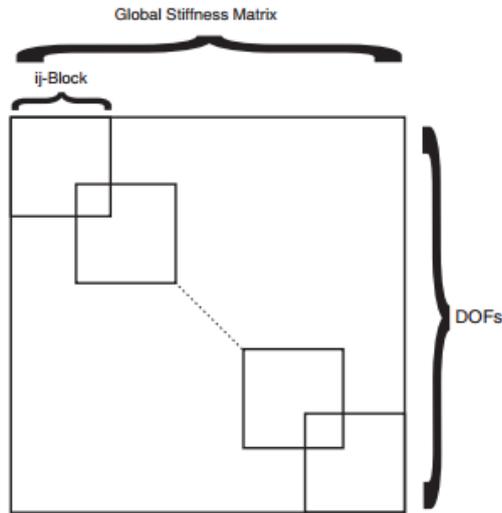


Figura 3.8 Esquema de ensamblaje de la matriz de rigidez global  
Fuente: Carrera E. Beam Structures: Classical and Advanced Theories [20]

### 3.4 Matriz de masa

La técnica para ensamblar el núcleo fundamental me permite obtener la ubicación de los vectores de elementos finitos [20].

$$\delta L_{ine} = \int_V \rho \ddot{u} \delta u^T dv \quad (3.66)$$

$$\delta L_{ine} = \int_l \delta u_{sj}^T N_j \left[ \int_\Omega \rho (F_s I) (F_t I) d\Omega \right] N_i \ddot{u}_{\tau i} dx \quad (3.67)$$

Donde el componente  $\ddot{u}$  es el vector aceleración nodal. La última ecuación puede ser escrita así también [20]:

$$\delta L_{in} = \delta u_{sj}^T m^{tsij} \ddot{u}_{\tau i} \quad (3.68)$$

En donde  $m^{tsij}$  es la matriz de masa y es expresado en las ecuaciones siguientes en donde contiene los siguientes componentes [20]:

$$m_{xx}^{tsij} = m_{yy}^{tsij} = m_{zz}^{tsij} = \rho \int_A F_t F_s dy dz \int_l N_i N_j dy \quad (3.69)$$

$$m_{yx}^{tsij} = m_{yz}^{tsij} = m_{xy}^{tsij} = m_{xz}^{tsij} = m_{zy}^{tsij} = m_{zx}^{tsij} = 0 \quad (3.70)$$

$$M\ddot{A} + KA = P \quad (3.71)$$

El valor de A representa el vector de nodos desconocidos y P es el vector carga que para el análisis es considerado cero en todos sus componentes. Gracias a esto se puede calcular las frecuencias naturales ( $\omega_I$ ) implementando en la matriz de rigidez calculada [20]:

$$(-\omega_i^2 M + K)A_I = 0 \quad (3.72)$$

### 3.5 Vector Fuerza

En los anteriores subcapítulos se mencionó la matriz de rigidez, al interactuar con la carga permite obtener desplazamientos, que son las variables desconocidas. Se puede observar que existen diferentes tipos cargas [20] por lo que mencionaré tres en específicos.

Las cargas superficiales:

$$\delta L_{ext}^{p\alpha\beta} = \int_{A_\alpha} F_s N_j \delta u_{\beta s_j} P_{\alpha\beta} dA \quad (3.73)$$

Para el caso de carga lineal, la ecuación 3.67 es:

$$\delta L_{ext}^{p\alpha\beta} = \int_l F_s N_j \delta u_{\beta s_j} q_{\alpha\beta} dx \quad (3.74)$$

La ecuación 3.67 es usada para la carga puntual y se convierte en:

$$\delta L_{ext}^{p\alpha\beta} = F_s(x_p, z_p) N_j(y_p) P \delta u_{s_j}^T \quad (3.75)$$

Donde se asume que P es aplicado en  $[x_p, y_p, z_p]$  que representa las direcciones en cada nodo. Las ecuaciones mostradas se usan para ensamblar el vector carga (ver Figura 3.9) detectando las variables desplazamientos.

$F_1$	s=1	j=1
$F_2$	s=2	
$F_3$	s=3	
$F_4$	s=1	j=2
$F_5$	s=2	
$F_6$	s=3	

Figura 3.9 Posición de los componentes de carga dentro del vector fuerzas nodal  
Fuente: Elaboración propia

### 3.6 Cuadratura de gauss para funciones de forma con un eje de coordenada

Para 1D la expansión de Lagrange en CUF, la cuadratura de Gauss es implementada para calcular las integrales  $F_\tau$  a lo largo de la viga. En la Ecuación 3.76 la variable  $w_k$  representa los pesos de la integración y  $\alpha_k$  los puntos de integración, en donde i,j dependen de los nodos por elemento que se considere [24].

$$\int_{-1}^{+1} N_i N_j |J| dr = \sum_k w_k N_i(\alpha_k) N_j(\alpha_k) |J \alpha_k| \quad (3.76)$$

El jacobiano está en función de la cantidad de nodos por elemento y matemáticamente es expresada de la siguiente manera.

$$J = \sum_i \frac{dN_i}{dr} X_i \quad (3.77)$$

Las funciones de forma se derivan con respecto a la coordenada normalizadas y se multiplica. El jacobiano es individual para cada elemento, pero si los elementos tienen la misma longitud, es igual para todos.

## **3.7 Método de conectividad por polinomios de Lagrange**

### **3.7.1 Introducción**

El modelo expansión utilizado dentro de la presente tesis está basado en expansiones polinomiales de Lagrange que resaltan las capacidades mejoradas del modelo 1D CUF en términos de precisión y costos computacionales más bajos comparados a modelos 3D, además de tener las siguientes características [24]:

Las variables del modelo expansión de Lagrange y condiciones de contorno pueden ubicarse dentro de la superficie física de la estructura. Esta característica es particularmente importante en un escenario de acoplamiento asistido por computador usando el método de elementos finitos.

Las variables desconocidas del problema son componentes de desplazamiento, por esa razón no existen rotaciones ni son usados variables de orden superior para describir el campo de desplazamiento de un modelo expansión de Lagrange.

El modelo refinado de manera específica se puede construir fácilmente, ya que los conjuntos de polinomios de Lagrange pueden ser dispersados y adoptar la forma de toda la sección transversal de la estructura a analizar.

### **3.7.2 Coordenada normalizada en la sección transversal**

Los polinomios de Lagrange se dan generalmente en términos de coordenadas normalizadas o naturales de segundo orden. Son polinomios 2D puesto que representan la sección transversal del modelo. El polinomio de Lagrange más simple es el cuadrilátero de cuatro puntos (L4) la mostrada en la Figura 3.10, los polinomios de Lagrange se pueden observar en la Ecuación 3.78 al 3.81 donde  $\alpha$  y  $\beta$  son las coordenadas normalizadas [24].

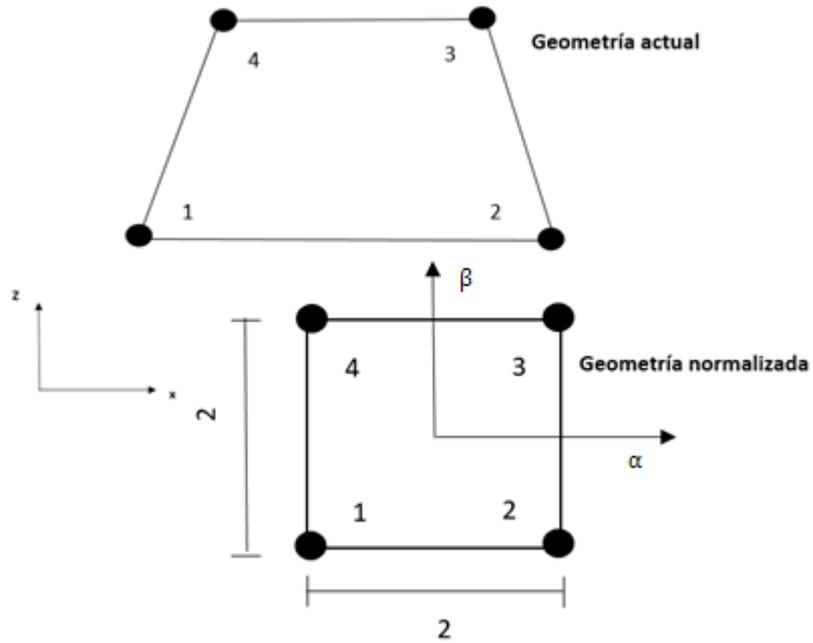


Figura 3.10 Elemento Lagrange de cuatro nodos (L4) en geometría real y normalizada  
Fuente: Elaboración propia [24].

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{1}{4}(1 - \alpha)(1 - \beta) & F_2 &= \frac{1}{4}(1 + \alpha)(1 - \beta) \\
 F_3 &= \frac{1}{4}(1 + \alpha)(1 + \beta) & F_4 &= \frac{1}{4}(1 - \alpha)(1 + \beta) \quad (3.78-3.81)
 \end{aligned}$$

El L4 mostrado con anterioridad tiene una formación bilineal ( $\alpha\beta$ ). Otro de los polinomios de Lagrange, que es utilizado por la presente tesis, es el L9 que tiene nueve nodos y es representado en la Figura 3.11. Los polinomios L9 y las coordenadas de los puntos son vistas en las siguientes ecuaciones [24]:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{1}{4}(\alpha^2 - \alpha)(\beta^2 - \beta) & F_2 &= \frac{1}{2}(1 - \alpha^2)(\beta^2 - \beta) \\
 F_3 &= \frac{1}{4}(\alpha^2 + \alpha)(\beta^2 - \beta) & F_4 &= \frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha)(1 - \beta^2) \\
 F_5 &= \frac{1}{4}(\alpha^2 + \alpha)(\beta^2 + \beta) & F_6 &= \frac{1}{2}(1 - \alpha^2)(\beta^2 + \beta) \\
 F_7 &= \frac{1}{4}(\alpha^2 - \alpha)(\beta^2 + \beta) & F_8 &= \frac{1}{2}(\alpha^2 - \alpha)(1 - \beta^2) \\
 F_9 &= (\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1)
 \end{aligned} \quad (3.82-3.90)$$

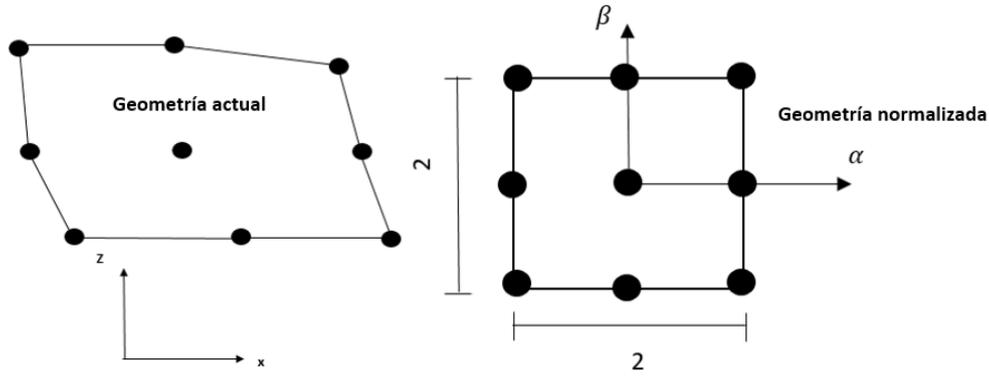


Figura 3.11 Elemento Lagrange de nueve nodos (L9) en geometría real y normalizada  
 Fuente: Elaboración propia [24].

### 3.7.3 Formulación isoparamétrico

La formulación isoperimétrica permite analizar a 1D, 2D y son explotadas para tratar en:

Funciones de forma en 1D a lo largo del eje longitudinal de la estructura, funciones de expansión en 2D para describir el campo desplazamiento de la estructura en su sección transversal.

Para el caso de una formulación 2D si se desea calcular el núcleo fundamental se requiere una evaluación de las integrales superficiales en coordenadas “z” y “y”. (2D).

$$\int_{\Omega} F_y F_{s_z} dy dz \quad (3.91)$$

El dominio de integración es variable de acuerdo con la superficie a integrar y son independientes de la clase adoptada de  $F_{\tau}$ , si se tiene en cuenta las coordenadas normalizadas ( $\alpha$  y  $\beta$ ) se considera un dominio 2D fijo independientemente de la geometría real. En el caso de dominios cuadriláteros se obtiene lo siguiente [24]:

$$\int_A F_{\tau_y}(y, z) F_{s_z}(y, z) dy dz = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F_{\tau_y}(\alpha, \beta) F_{s_z}(\alpha, \beta) |J(\alpha, \beta)| d\alpha d\beta \quad (3.92)$$

Donde  $|J|$  es determinante jacobiano de la transformación, en algunos casos la integral en coordenadas normalizadas puede ser calculadas analíticamente, pero utilizando siempre la operación numérica.

Las derivadas parciales deben ser calculadas con respecto a las coordenadas normalizadas, de acuerdo con la regla de la cadena [24]:

$$F_{\tau,y} = F_{\tau,\alpha}\alpha_{,y} + F_{\tau,\beta}\beta_{,y} \quad (3.93)$$

$$F_{\tau,z} = F_{\tau,\alpha}\alpha_{,z} + F_{\tau,\beta}\beta_{,z} \quad (3.94)$$

La anterior ecuación se evalúa utilizando la siguiente relación:

$$\alpha = \alpha(y, z)\beta = \beta(y, z) \quad (3.95)$$

Estas relaciones son a menudo difíciles de establecer y, por esta razón, es preferible utilizar la regla de la cadena de la siguiente manera [24]:

$$F_{\tau,\alpha} = F_{\tau,y}y_{,\alpha} + F_{\tau,z}z_{,\alpha} \quad (3.96)$$

$$F_{\tau,\beta} = F_{\tau,y}y_{,b} + F_{\tau,z}z_{,b} \quad (3.97)$$

Puede ser reescrito de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} F_{\tau,\alpha} \\ F_{\tau,\beta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{,\alpha}z_{,\alpha} \\ y_{,b}z_{,b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{\tau,y} \\ F_{\tau,z} \end{Bmatrix} \quad (3.98)$$

$$Jacobiano = \begin{bmatrix} y_{,\alpha}z_{,\alpha} \\ y_{,b}z_{,b} \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

Y la relación inversa es de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} F_{\tau,y} \\ F_{\tau,z} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} z_{,b} & -z_{,\alpha} \\ -y_{,\beta} & y_{,\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{\tau,\alpha} \\ F_{\tau,\beta} \end{Bmatrix} \quad (3.100)$$

En la Ecuación 3.100, se requiere que el inverso del  $J$  exista. Los cuatro términos de la matriz del jacobiano se calculan por medio de la relación existente entre el cartesiano y las coordenadas existentes:

$$y = y(\alpha, \beta) \quad z = z(\alpha, \beta) \quad (3.101)$$

La formulación isoparamétrica sirve para obtener esta relación, por lo tanto, nos permite calcular el jacobiano y asociar la geometría actual a la geometría normalizada de la expansión de Lagrange. El término isoparamétrico significa que se adoptan las mismas funciones para interpolar el campo de desplazamiento y la geometría de un elemento estructural [24].

$$u = F_{\tau}u_{\tau} \quad (3.102)$$

$$y = F_{\tau}y_{\tau} \quad z = F_{\tau}z_{\tau} \quad (3.103-3.104)$$

Donde  $y_{\tau}$  y  $z_{\tau}$  son las coordenadas reales de los nodos. El jacobiano ( $J$ ) se halla de la siguiente manera para L9 que es usado para la presente tesis:

$$J = (z_{,\beta}y_{,\alpha} - z_{,\alpha}y_{,\beta}) \quad (3.105)$$

$$y_{,\alpha} = F_{\tau,\alpha}y_{\tau}$$

$$y_{,\alpha} = F_{1,\alpha}y_1 + F_{2,\alpha}y_2 + F_{3,\alpha}y_3 + F_{4,\alpha}y_4 + F_{5,\alpha}y_5 + F_{6,\alpha}y_6 + F_{7,\alpha}y_7 + F_{8,\alpha}y_8 + F_{9,\alpha}y_9$$

$$\begin{aligned} y_{,\alpha} = & \frac{1}{4}(2\alpha - 1)(\beta^2 - \beta)(-a) + \frac{1}{2}(-2\alpha)(\beta^2 - \beta)(0) + \frac{1}{4}(2\alpha + 1)(\beta^2 - \beta)(a) + \frac{1}{2}(2\alpha \\ & + 1)(1 - \beta^2)(a) + \frac{1}{4}(2\alpha + 1)(\beta^2 + \beta)(a) + \frac{1}{2}(-2\alpha)(\beta^2 + \beta)(0) + \frac{1}{4}(2\alpha \\ & - 1)(\beta^2 + \beta)(-a) + \frac{1}{2}(2\alpha - 1)(1 - \beta^2)(-a) + (2\alpha)(\beta^2 - 1)(0) \end{aligned}$$

$$y_{,\alpha} = a \quad (3.106 - 3.109)$$

$$z_{,\beta} = F_{\tau,\beta}z_{\tau}$$

$$\begin{aligned} z_{,\beta} = & \frac{1}{4}(\alpha^2 - \alpha)(2\beta - 1)(-b) + \frac{1}{2}(1 - \alpha^2)(2\beta - 1)(-b) + \frac{1}{4}(\alpha^2 + \alpha)(2\beta - 1)(-b) \\ & + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha)(-2\beta)(0) + \frac{1}{4}(\alpha^2 + \alpha)(2\beta + 1)(b) + \frac{1}{2}(1 - \alpha^2)(2\beta + 1)(b) \\ & + \frac{1}{4}(\alpha^2 - \alpha)(2\beta + 1)(b) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \alpha)(-2\beta)(0) + (\alpha^2 - 1)(2\beta)(0) \end{aligned}$$

$$z_{,\beta} = b \quad (3.110 - 3.112)$$

Y finalmente los valores de  $z_{,\alpha}y_{,\beta}$  son los siguientes:

$$z_{,\alpha} = 0 \quad y_{,\beta} = 0 \quad (3.113-3.114)$$

$$\text{Por lo tanto el jacobiano es:} \quad J = ab \quad (3.115)$$

# CAPÍTULO 4: COMPORTAMIENTO MECANICO DE UN PUENTE PEATONAL MEDIANTE EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

## 4.1 Layout preliminar del puente peatonal

En la Figura 4.1 se muestra un primer esquema del puente peatonal en donde se muestran los componentes que normalmente son considerados, cada uno de estos componentes cumplen funciones específicas que serán mencionada a continuación.

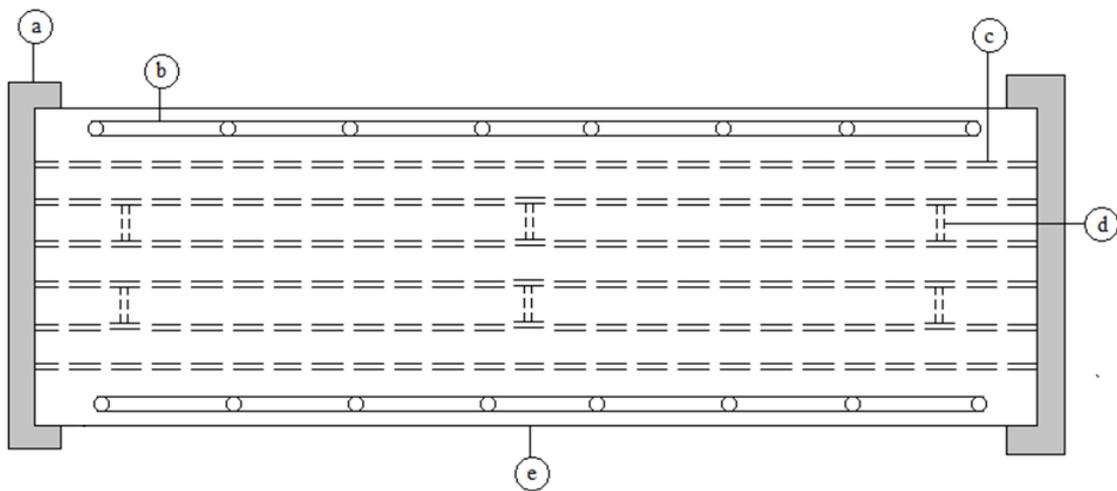


Figura 4.1 Layout del puente peatonal  
Fuente: Elaboración propia

- a) Es la representación gráfica del estribo destinada a soportar el peso de la superestructura del puente, tiene como objetivo principal transmitir el peso a los cimientos y mantener la posición de la tierra.
- b) La baranda es un elemento de contención de peatones, no es considerado parte estructural del puente peatonal ya que no recibe parte de la carga viva (peso propio de los peatones).
- c) El rigidizador es el componente fundamental del puente peatonal, porque ofrece a la superestructura la rigidez total para poder soportar la carga peatonal y a las distintas combinaciones de carga a la que está sujeta.

- d) Los diafragmas son componentes cuya función principal es distribuir los esfuerzos al que es sujeto la superestructura, a causa de la carga peatonal viva como las diferentes combinaciones de carga.
- e) El panel es el componente que recibe directamente la carga peatonal, y determina la presión a la que va a estar sujeta la estructura.

## 4.2 Requerimientos geométricos

Las dimensiones de la estructura del puente peatonal tales como el panel y del rigidizador tipo sombrero se obtienen a partir de una evaluación comparativa entre diferentes espesores, altura del rigidizador y del panel. A continuación, se describe como se procedió a la generación de la geometría de la estructura del puente peatonal.

Se obtuvo en primer lugar el espesor mínimo del panel en donde era necesario obtener el esfuerzo de diseño, que es la mitad del esfuerzo último del material compuesto. En la Tabla 4.1, se muestra las propiedades de la lámina de material compuesto [32] que fue usado para la elaboración del puente peatonal.

<b>Propiedades del material</b>	
$E_x$	23400 MPa
$E_y$	23400 MPa
$E_z$	7780 MPa
$G_{xy}$	3520 MPa
$G_{yz}$	2300 MPa
$G_{xz}$	2300 MPa
$\nu_{xy}$	0.153
$\nu_{yz}$	0.593
$\nu_{xz}$	0.593
$mín \sigma_{ut}$	95 MPa
$mín \sigma_{uc}$	336 MPa
$mín \tau_u$	27.2 MPa

Tabla 4.1 Propiedades mecánicas del GFRP usado en el puente peatonal  
Fuente: Elaboración propia

Se calcula el espesor del panel utilizando la Ecuación 2.6 y se reemplaza los valores para obtener el espesor de este componente. Se considera la presión de 4.07 KPa proporcionada por la norma ASHTOO como presión a soportar un puente peatonal. El

ancho del panel es de dos metros distancia aproximadamente y la profundidad de la curva es cero; por lo tanto,  $K_c$  es igual a uno.

Espesor mínimo del panel:

$$t_{\min} = 2000 \text{ mm} * 1 \sqrt{\frac{4.07 * 0.5}{1000 * 0.5 * 27.2}}$$

$$t_{\min} = 24.9 \text{ mm} \quad (4.1-4.2)$$

El espesor mínimo obtenido es de 24.9 mm con respecto a las condiciones iniciales, el espesor usado para el dimensionamiento del panel es de 39.78 milímetros debido a que el espesor de la lámina de material compuesto es de 0.663 mm, obteniendo así 60 láminas para fabricar solo el panel.

Además, el ancho del panel que recibe la carga peatonal de manera directa tiene una medida de 2.010 metro para un libre tránsito en ambas direcciones y el largo es de 8 metros.

Se realizaron previamente simulaciones para determinar las dimensiones, siendo la final la mostrada en la Figura 4.2 y se optó por un total de 3 rigidizadores (ver Figura 4.3).

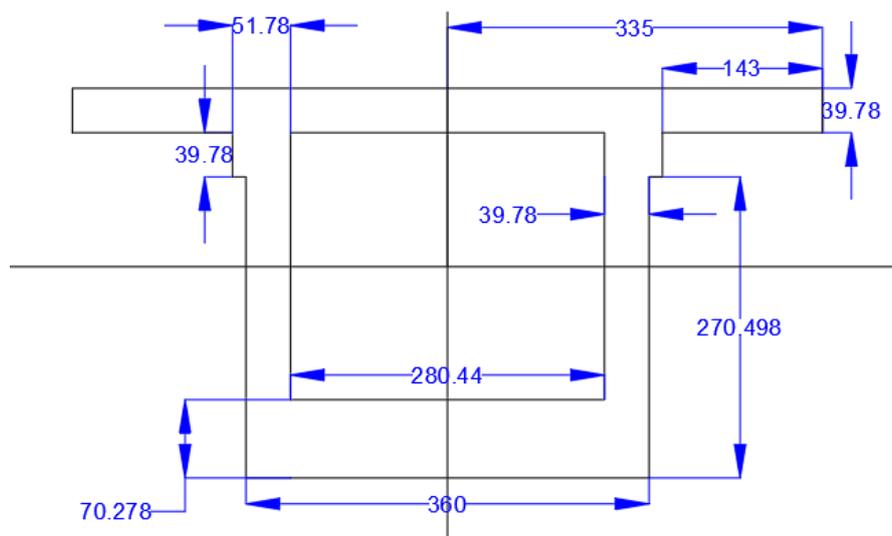


Figura 4.2 Dimensiones del rigidizador (unidades en mm)  
Fuente: Elaboración propia

El software AutoCAD se usó para obtener el eje de coordenadas neutro y las propiedades geométricas de la sección del rigidizador. Los valores de la Tabla 4.2 son los valores de la geometría obtenida del rigidizador y que son mayores a los calculados por la norma geométrica.

	<b>Del rigidizador</b>	<b>Norma Geométrica</b>
Área	72001.8 $mm^2$	371 $mm^2$
Inercia	1245697235 $mm^4$	35359474 $mm^4$
Módulo de sección	2359275 $mm^3$	141607 $mm^3$

Tabla 4.2 Propiedades geométricas del rigidizador  
Fuente: Elaboración propia

Módulo de sección mínimo:

$$SM = \frac{83.3 * 1 * 4.07 * 310 * 8000^2}{0.5 * 95} 10^{-9} [cm^3]$$

$$SM = 141.6078 [cm^3]$$

$$SM = 141607.8 [mm^3] \quad (4.3-4.5)$$

Inercia mínima para considerar:

$$I = \frac{26 * 1^{1.5} * 4.07 * 310 * 8000^3}{0.5 * 95} 10^{-11} [cm^4]$$

$$I = 3535.9474 [cm^4]$$

$$I = 35359474 [mm^4] \quad (4.6-4.8)$$

Área de corte mínima:

$$A_w = \frac{5 * 4.07 * 310 * 8000}{0.5 * 27.2} 10^{-6} [cm^2]$$

$$A_w = 3.7108[cm^2]$$

$$A_w = 371.08[mm^2] \quad (4.9-4.11)$$

De acuerdo con la Figura 4.2, se dimensiona la estructura del puente peatonal cumpliendo con las restricciones geométricas de las Ecuación 2.7 hasta la 2.9, el ancho de un rigidizador es de 670 mm por lo cual se necesita de 3 rigidizadores para obtener el ancho general del puente peatonal que es de 2010 mm (ver Figura 4.3).

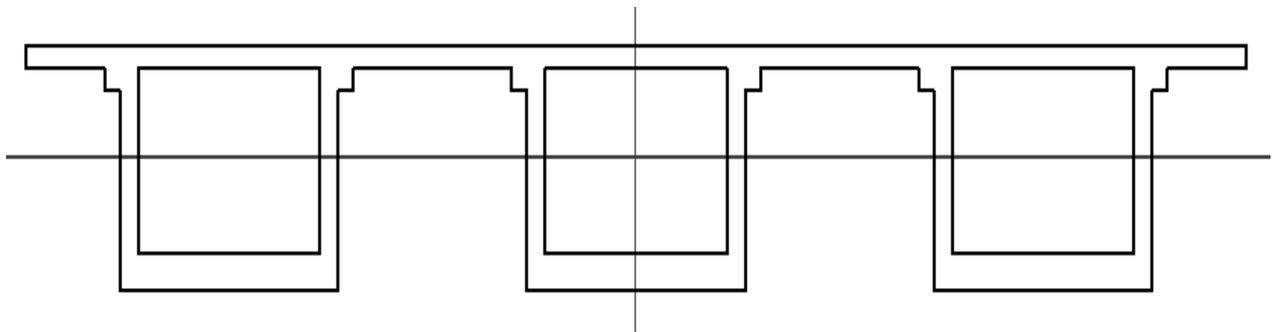


Figura 4.3 Visualización de la estructura del puente peatonal  
Fuente: Elaboración propia

La estructura del puente peatonal está conformada por un panel y tres rigidizadores de material compuesto como se describió en el actual epígrafe, para generar la Figura 4.3 es necesario ubicar el centro de inercia que fue hallado en AutoCAD. El proceso de extruir es realizado dentro del DesignModeler de Ansys Workbench (ver Figura 4.4).

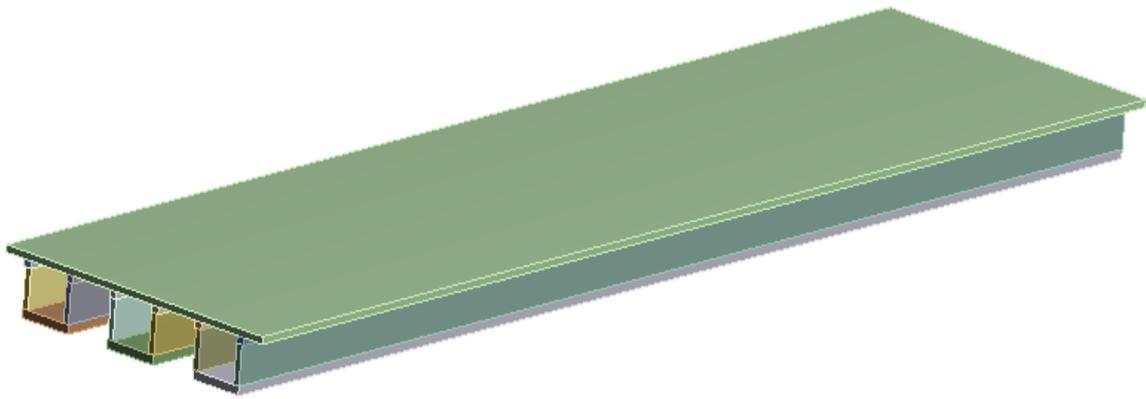


Figura 4.4 Sección transversal extruida en DesignModeler de ANSYS.  
Fuente: Elaboración propia

Las áreas sombreadas son de diferentes propiedades mecánicas (ver Figura 4.5) debido a que es necesario que la placa rote 90 grados con respecto al eje x para una mejor distribución y orientación de las fibras en la hora de la fabricación, en la Tabla 4.3 se puede ver las propiedades mecánicas del material indicado.

<b>Propiedades del material rotado</b>	
$E_1$	23400 MPa
$E_2$	7780 MPa
$E_3$	23400 MPa
$G_{12}$	2300 MPa
$G_{13}$	3520 MPa
$G_{23}$	2300 MPa
$\nu_{12}$	0.593
$\nu_{13}$	0.153
$\nu_{23}$	0.197

Tabla 4.3 Propiedades mecánicas del material rotado  
Fuente: Elaboración propia

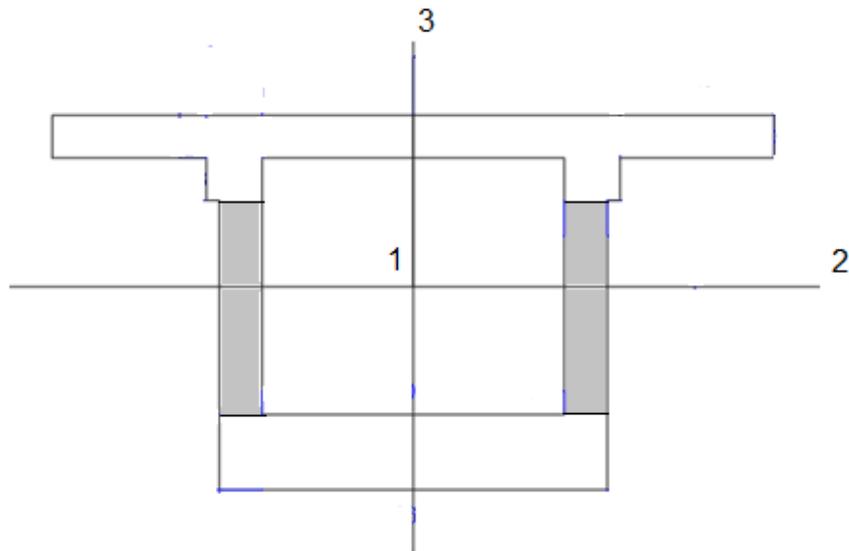


Figura 4.5 Parte con diferentes propiedades mecánicas.  
Fuente: Elaboración propia

### 4.3 Puente peatonal vista general

En la Figura 4.6 se visualiza la vista general de la estructura del puente peatonal de material compuesto, las barandas cumplen con las relaciones geométricas según el subcapítulo 2.2.

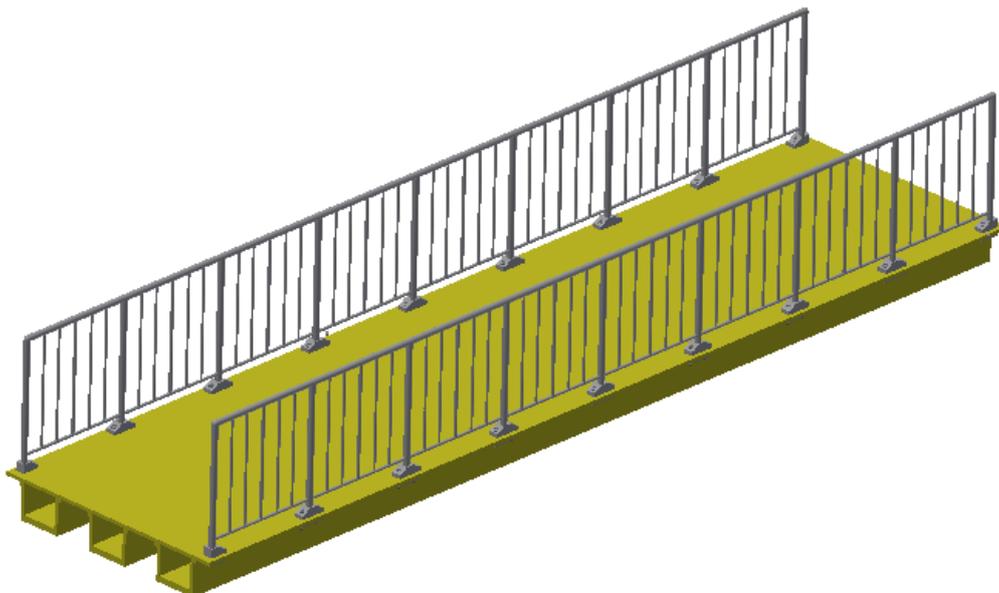


Figura 4.6 Vista general de puente peatonal  
Fuente: Elaboración propia

#### 4.4 Condiciones de contorno

Para obtener la deformación de la estructura en la simulación del puente peatonal por medio del software ANSYS y por la formulación generalizada, se debe tener en cuenta las condiciones de contorno del modelo, es decir, los apoyos y la carga. Por ello se abordará el análisis que se realizó para definir estas condiciones.

##### 4.4.1 Apoyos

Para determinar la deformación y esfuerzos presentes en la estructura del puente peatonal de material compuesto se realizará un análisis estático, de acuerdo con la norma de diseño de puentes peatonales la estructura tendrá condiciones de simplemente apoyado. En la Figura 4.7, se muestra la línea en el que se realiza la restricción fija, la ubicación es cuando “x” es igual a cero a fin de generar rotación.

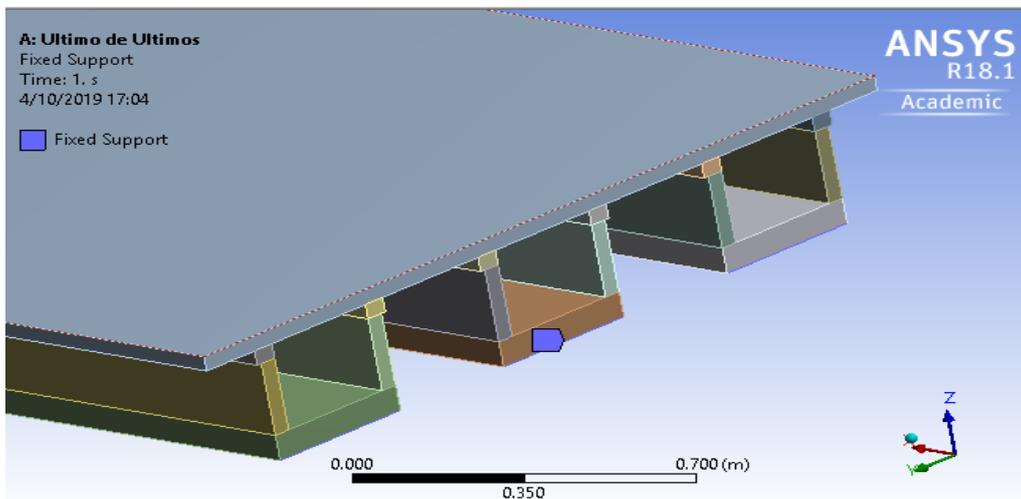


Figura 4.7 Apoyo fijo.  
Fuente: Elaboración propia

En el extremo, cuando “x” es igual a ocho metros, existe solo desplazamiento en la dirección “x” por estar apoyado en un rodillo y los otros grados de libertad tienen el valor de cero, como lo indicado en la Tabla 4.4.

Dirección	Estado
$U_x$ componente	Libre
$U_y$ componente	0 (Fijo)
$U_z$ componente	0 (Fijo)

Tabla 4.4 Grados de libertad en x=8 metros  
Fuente: Elaboración propia

La condición de simplemente apoyado en la codificación de la teoría refinada se realiza primero, con la identificación de los nodos que coinciden con la ubicación antes impuesta. La ventaja de los polinomios de LaGrange como antes explicado, los nodos de la sección representan los desplazamientos en las tres direcciones, por lo cual, si se desea fijar una parte es necesario eliminar de la matriz de rigidez las posiciones que corresponden a estos nodos.

Los nodos que representan la parte fija son de la numeración 352 al 378, pero como cada nodo representa tres posiciones dentro de la matriz se elimina a partir del 1054 hasta 1134 y con el fin de obtener la condición de desplazamiento solo en el eje x, en el extremo a ocho metros se elimina los siguientes grados de libertad.

$$DOF_y = [(N_{NE} - 1) * N_{BE} + [351 * 3 + 2: 3: 378 * 3]] \quad (4.12)$$

$$DOF_z = [(N_{NE} - 1) * N_{BE} + [351 * 3 + 3: 3: 378 * 3]] \quad (4.13)$$

$N_{NE}$  = número de nodos por elemento

$N_{BE}$  = número de elementos en la viga

La Ecuación 4.12 y 4.13 hacen referencia a las posiciones de los desplazamientos en dirección “y” y en dirección “z” respectivamente, que están ubicadas dentro de la matriz de rigidez en función de la cantidad de nodos y elementos a lo largo de la sección transversal.

#### 4.4.2 Aplicación de la Carga

La densidad del material compuesto utilizado en la estructura es de  $1980 \text{ kg/m}^3$ ; por lo tanto, la carga muerta es expresada en  $2087.38 \text{ N/m}^2$ . La carga a evaluar sobre la estructura es una presión de 4.070 KPa proveniente de la norma ASHTOO para puentes peatonales en general. La dirección de esta presión es definida en el eje -z y aplicada en el área activa que vendría hacer el área superficial superior del panel (ver Figura 4.8).

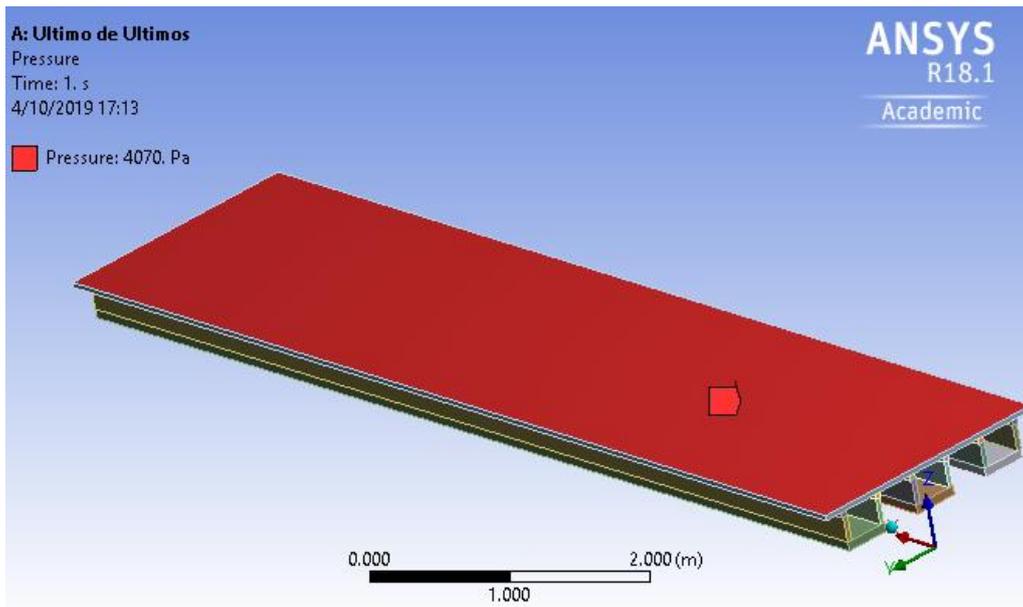


Figura 4.8 Carga viva peatonal  
Fuente: Elaboración propia

La fuerza afecta a todos los nodos que definen la superficie del panel, estos nodos están en función del elemento de la sección transversal que se extienden a lo largo de la viga.

La presión al ser ubicada dentro de la matriz fuerza en la codificación de Matlab debe tener la siguiente expresión:

$$DOF_{Fuerza} = (a) + 3 * (conec_{secc}(ee, t) - 1) + 3 * N_{secc}(e, i) - 1 \quad (4.14)$$

$a = 1$  (eje x) , $2$  (eje y) y  $3$  (eje z)

$conec_{secc}$  = Conexión de los nodos en el orden establecido según L9.

$N_{secc}$ = Cantidad de nodos en la sección transversal

ee= Elemento L9 de la sección transversal del puente peatonal

e= Elemento que discretiza el largo de la viga

i= número de nodos por elemento

#### **4.5 Presentación y análisis de la simulación por el método de elementos finitos.**

Después de haber definido los apoyos y las condiciones de carga se procede a realizar el mallado del modelo.

##### **4.5.1 Mallado**

El mallado es el paso previo al cálculo por el método de los elementos finitos, consiste en generar elementos y nodos en todo el modelo geométrico 3D. El software permite la manipulación de los tamaños de los elementos dentro del mallado, por lo cual para obtener resultados óptimos y con un costo computacional bajo, es necesario trabajar la malla, es decir, obtener elementos regulares (ver Figura 4.9).

Dentro de las métricas de malla de ANSYS existen varias opciones para evaluar la calidad de la malla, de las cuales solo se utilizarán dos en específico para determinar un correcto enmallado estas son el Orthogonal Quality y Aspect Ratio.

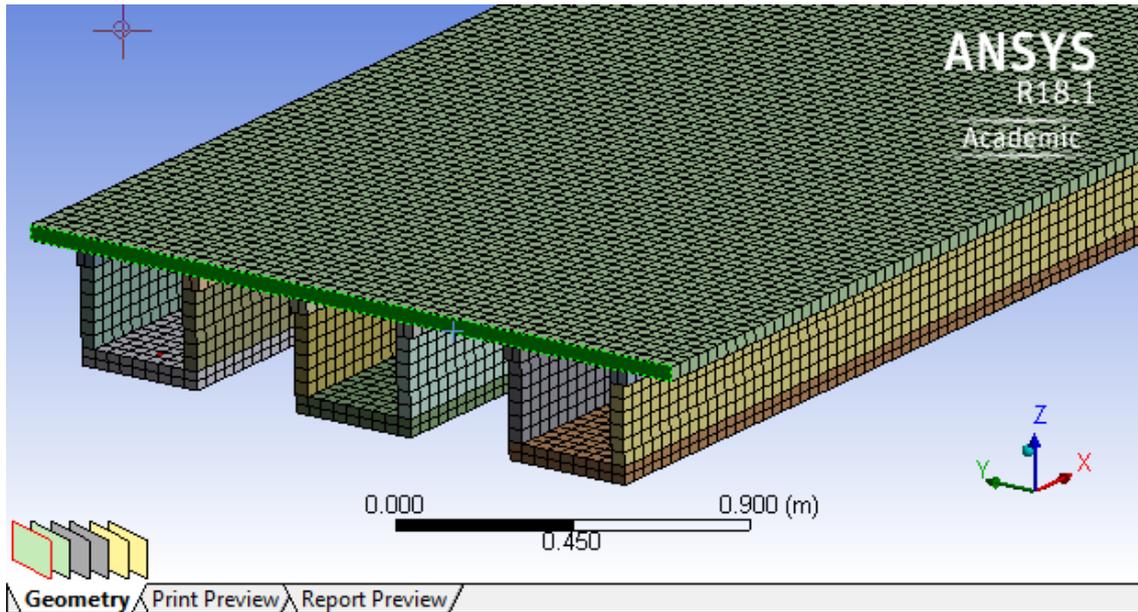


Figura 4.9 Vista superficial de la malla estructurada  
Fuente: Elaboración propia

Se realizó diferentes enmallados dentro de la simulación en Ansys; por lo tanto, se puede determinar que los desplazamientos en direcciones  $u_x$  y  $u_z$  convergen con una menor cantidad de nodos (297024 DOF) comparado al desplazamiento en  $u_y$  (450303 DOF).

	DOF	$u_x 10^4$	$u_y 10^5$	$u_z 10^3$	Malla (m)
[4,0.83011,0.040355]	1612758	6.024	0.987	-8.073	0.03
	649695	6.006	1.035	-8.067	0.04
	<b>450303</b>	<b>6.001</b>	<b>1.028</b>	<b>-8.066</b>	<b>0.05</b>
	297024	6.005	-0.141	-8.101	0.06
	228399	5.91	0.597	-7.979	0.07

Tabla 4.5 Comparación de tamaño de malla  
Fuente: Elaboración propia

Se consideró la menor cantidad de grados de libertad para la convergencia de todos los valores de desplazamiento e índices de calidad de malla que estén dentro los parámetros establecidos, por lo que fue elegida el mallado de la Tabla 4.5 para la comparación con la teoría refinada usando polinomios de LaGrange, es decir, la malla de tamaño de 0.05 metros. En la Tabla 4.6 se muestra lo información de los indicadores de calidad que están dentro de los parámetros para una buena calidad de malla.

	Mín.	Máx.	Promedio
<b>ORTHOGONAL QUALITY</b>	1	1	1
<b>ASPECT RATIO</b>	1.2569	1.9312	1.3795

Tabla 4.6 Calidad de malla para 450303 grados de libertad  
Fuente: Elaboración propia

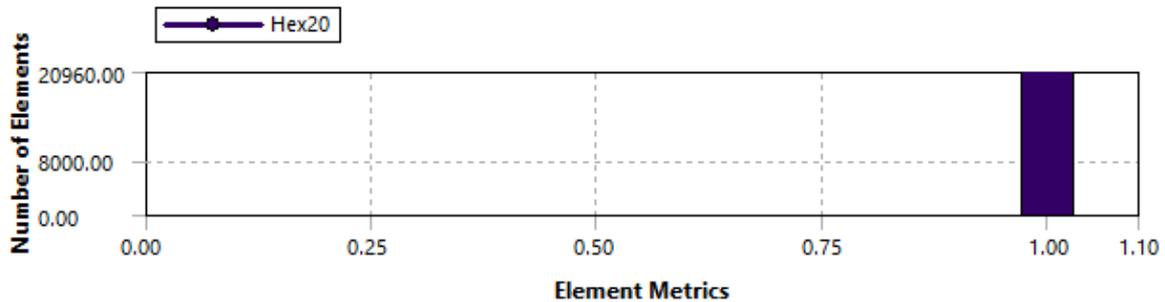


Figura 4.10 Orthogonal Quality  
Fuente: Ansys

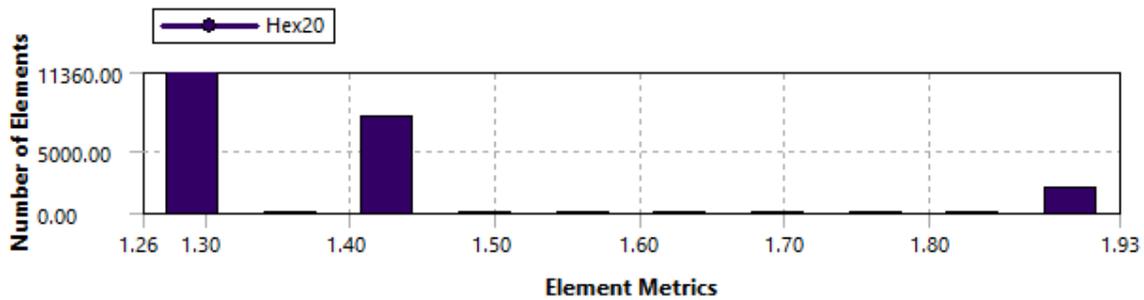


Figura 4.11 Aspect ratio  
Fuente: Ansys

## 4.6 Análisis de resultados y discusión

### 4.6.1 Análisis de desplazamiento de la carga peatonal

En la Figura 4.12, se muestra los nodos de la sección transversal en la parte intermedia, cuando  $x = 4$  metros donde se visualiza el desplazamiento  $u_y$  y  $u_z$  de los nodos que discretiza la sección transversal del puente peatonal con una escala del desplazamiento de  $10^3$ . En la parte superior perteneciente al panel existe mayor desplazamiento en los extremos y es debido a que el refuerzo más cercano está a 0.143 metros de distancia. La tendencia del  $u_z$  es verificado con los resultados obtenidos con el ANSY para  $z=0.16027$  metros en diferentes ubicaciones de “y”.

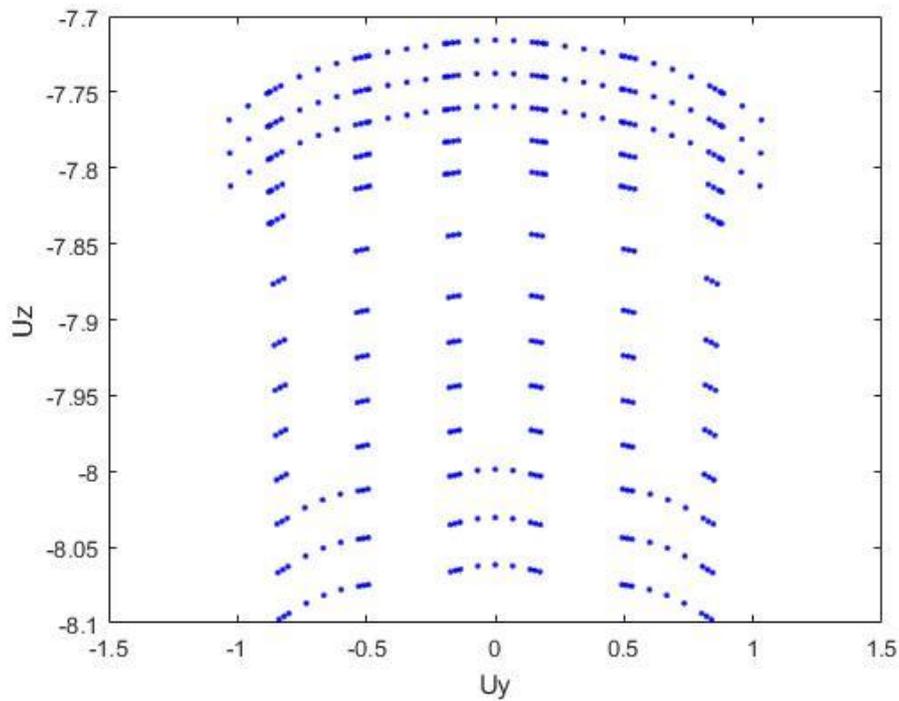


Figura 4.12 Tendencia desplazamiento de los nodos de la sección transversal  
Fuente: Elaboración propia

Se realizó la simulación vía ANSYS Workbench en donde se evalúa diferentes puntos para luego ser comparado con la teoría refinada. En la Tabla 4.7 se muestra la ubicación de siete nodos con los valores de desplazamientos en las tres direcciones, el resultado de la teoría refinada se aproxima al tridimensional de 450303 grados de libertad (desde ahora será llamada DOF's) solo utilizando 14742 DOF's que representa el 3.27% usado por el tridimensional. Por lo tanto, la formulación unificada permite obtener satisfactoriamente los desplazamientos para una carga peatonal y la condición de simplemente apoyado.

	<b>DOF</b>	<b>Ux 10<sup>4</sup></b>	<b>Uy 10<sup>5</sup></b>	<b>Uz 10<sup>3</sup></b>
<b>[ 4, 1.005,0.16027]</b>	<b>ANSYS 450303</b>	6.000	2.842	-8.086
	<b>MATLAB 46494</b>	5.895	2.827	-8.000
	<b>MATLAB 21546</b>	5.806	2.829	-8.000
	<b>MATLAB 14742</b>	5.793	2.838	-8.000
<b>[ 4, 0.862,0.16027]</b>	<b>ANSYS 450303</b>	6.000	2.397	-8.063
	<b>MATLAB 46494</b>	5.895	2.379	-8.000
	<b>MATLAB 21546</b>	5.806	2.379	-8.000
	<b>MATLAB 14742</b>	5.793	2.386	-8.000
<b>[ 4,0.74011,0.16027]</b>	<b>ANSYS 450303</b>	6.001	1.978	-8.053
	<b>MATLAB 46494</b>	5.895	1.971	-8.000
	<b>MATLAB 21546</b>	5.806	1.968	-8.000
	<b>MATLAB 14742</b>	5.793	1.974	-8.000
<b>[ 4, 0.478,0.16027]</b>	<b>ANSYS 450303</b>	6.001	1.244	-8.037
	<b>MATLAB 46494</b>	5.894	1.239	-8.000
	<b>MATLAB 21546</b>	5.806	1.236	-8.000
	<b>MATLAB 14742</b>	5.793	1.239	-8.000
<b>[ 4, 0.335,0.16027]</b>	<b>ANSYS 450303</b>	6.001	0.889	-8.034
	<b>MATLAB 46494</b>	5.894	0.885	-8.000
	<b>MATLAB 21546</b>	5.806	0.842	-8.000
	<b>MATLAB 14742</b>	5.793	0.886	-8.000
<b>[ 4, 0.192,0.16027]</b>	<b>ANSYS 450303</b>	6.000	0.538	-8.028
	<b>MATLAB 46494</b>	5.894	5.360	-8.000
	<b>MATLAB 21546</b>	5.805	0.536	-8.000
	<b>MATLAB 14742</b>	5.793	0.537	-8.000
<b>[ 4, 0.07011,0.16027]</b>	<b>ANSYS 450303</b>	6.000	0.170	-8.027
	<b>MATLAB 46494</b>	5.894	0.171	-8.000
	<b>MATLAB 21546</b>	5.805	0.170	-8.000
	<b>MATLAB 14742</b>	5.792	0.171	-8.000

Tabla 4.7 Valores de desplazamientos en nodos superiores [4, y, 0.16027]

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo con la Tabla 4.7 se verifica que el mayor desplazamiento  $u_z$  ocurre en el extremo del panel, el máximo valor es de -8.086 mm de acuerdo con el tridimensional, la teoría refina tiene un valor de -8.000 mm, con un porcentaje de desviación 1.06%. Ahora se evaluará en que parte del espesor de 39.78 mm del panel se encuentra el desplazamiento máximo.

En la Figura 4.13, se presenta la tendencia de los valores de  $u_z$ , con el objetivo de saber con exactitud en que parte del panel se encuentra la flecha máxima, se realiza una comparación del modelo matemático con el software comercial resultando que la deflexión máxima ocurre cuando  $z=0.12049$  m en ambos casos.

En la Tabla 4.8 es presentado los valores de desplazamiento a lo largo del rigidizador. Los valores obtenidos por la teoría refinada y Ansys Workbench son próximos. Los  $u_x$ ,  $u_y$ , y  $u_z$  se aproximan al 3D cuando se aumenta los grados de libertad. Se observa que el  $u_z$  tiende al tridimensional con pocos grados de libertad.

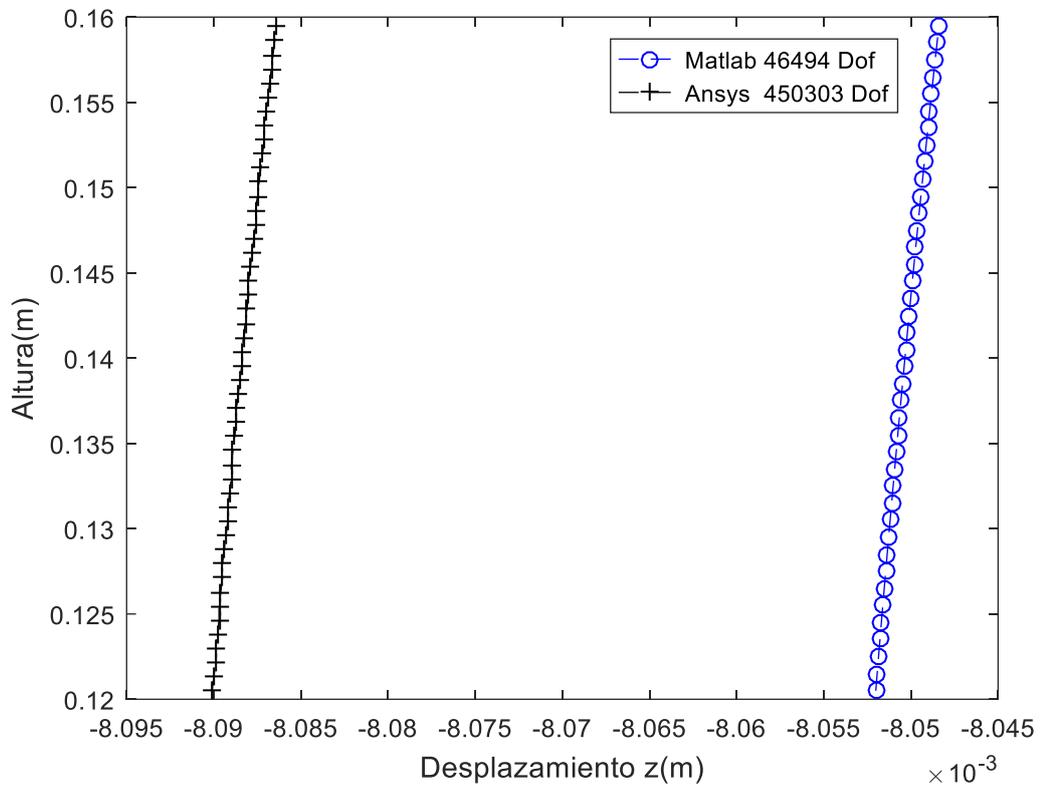


Figura 4.13 Desplazamiento  $u_z$  del extremo del panel en  $y=1.005$  m  
Fuente: Elaboración propia

	DOF	Ux 10 <sup>4</sup>	Uy 10 <sup>5</sup>	Uz 10 <sup>3</sup>
<b>[4,0.83011,0.14038]</b>	<b>ANSYS 450303</b>	6.001	2.061	-8.060
	<b>MATLAB 46494</b>	5.895	2.058	-8.000
	<b>MATLAB 21546</b>	5.800	2.059	-8.000
	<b>MATLAB 14742</b>	5.793	2.065	-8.000
<b>[4,0.83011,0.1006]</b>	<b>ANSYS 450303</b>	6.001	1.634	-8.065
	<b>MATLAB 46494</b>	5.895	1.655	-8.000
	<b>MATLAB 21546</b>	5.806	1.661	-8.000
	<b>MATLAB 14742</b>	5.794	1.663	-8.000
<b>[4,0.83011,0.040355]</b>	<b>ANSYS 450303</b>	6.001	1.028	-8.066
	<b>MATLAB 46494</b>	5.895	1.059	-8.000
	<b>MATLAB 21546</b>	5.806	1.072	-8.000
	<b>MATLAB 14742</b>	5.793	1.069	-8.000
<b>[4,0.83011,-0.029878]</b>	<b>ANSYS 450303</b>	6.001	0.376	-8.066
	<b>MATLAB 46494</b>	5.894	0.413	-8.000
	<b>MATLAB 21546</b>	5.806	0.434	-8.000
	<b>MATLAB 14742</b>	5.793	0.430	-8.000
<b>[4,0.83011,-0.089634]</b>	<b>ANSYS 450303</b>	6.001	-0.159	-8.065
	<b>MATLAB 46494</b>	5.894	-0.113	-8.000
	<b>MATLAB 21546</b>	5.806	-0.082	-8.000
	<b>MATLAB 14742</b>	5.793	-0.085	-8.000
<b>[4,0.83011,-0.154651]</b>	<b>ANSYS 450303</b>	6.000	-0.751	-8.061
	<b>MATLAB 46494</b>	5.894	-0.681	-8.000
	<b>MATLAB 21546</b>	5.806	-0.639	-8.000
	<b>MATLAB 14742</b>	5.793	-0.631	-8.000

Tabla 4.8 Valores de desplazamientos en diferentes nodos [4, 0.83011, z]  
Fuente: Elaboración propia

Se realiza la comparación en el punto [4,0.83011,0.040355] de la Tabla 4.8 donde se observa que la teoría refina usando 14742 grados de libertad tiene desplazamientos en  $u_y$  y en  $u_z$  que converge con menos grados de libertad, comparado a los valores obtenidos por el ANSYS en el mismo punto mostrado en la Tabla 4.5 en el cual requieren más grados de libertad. Con respecto al desplazamiento en el eje “x” se obtiene valores muy próximos a los obtenidos por el ANSYS usando 228399 grados de libertad.

En la Figura 4.14, presenta la comparación del desplazamiento  $u_y$ , el modelo presentado contiene 46494 DOF’s y se puede observar que tiene la misma tendencia que los valores obtenidos con el Ansys que usa 450303 DOF’s, la distribución se realiza en

toda la altura del rigidizador, cabe resaltar que el desplazamiento es de valor  $10^{-5}$ , siendo el valor insignificante la teoría refinada predice con gran exactitud lo del modelo tridimensional.

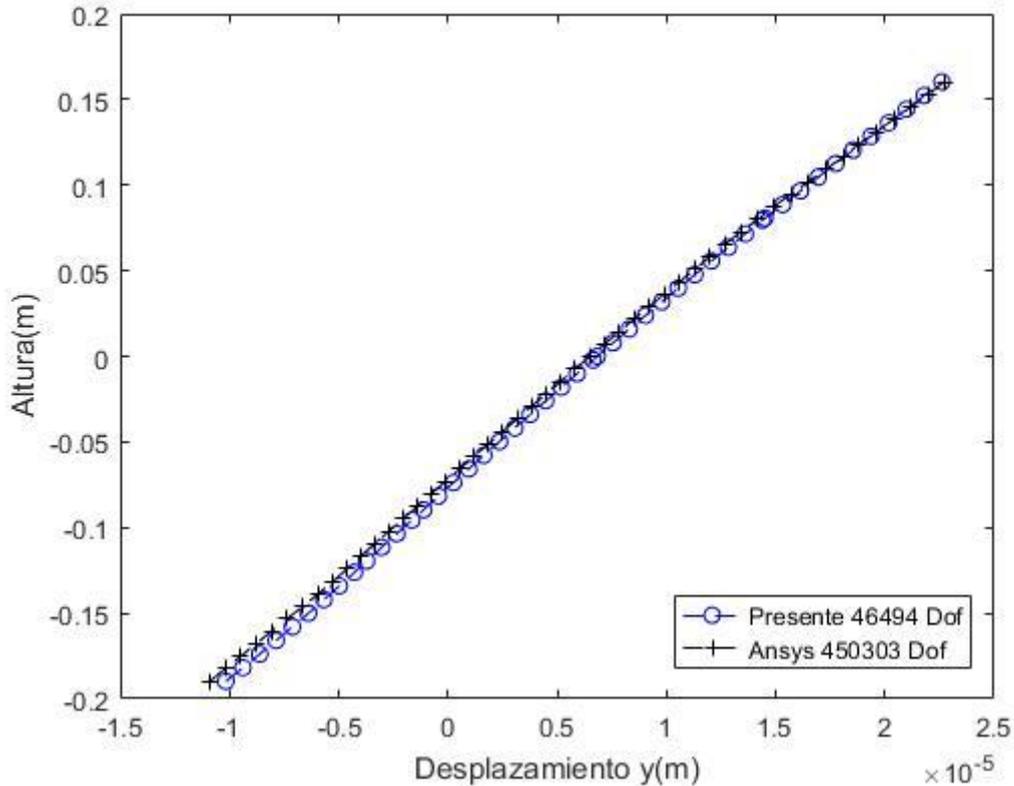


Figura 4.14 Distribución de los desplazamientos  $u_y$  [4,0.830, Z]  
Fuente: Elaboración propia

En la Tabla 4.9 se visualiza los valores de desplazamientos en diferentes puntos de la sección transversal a lo largo de la estructura, se comprueba que la teoría refinada se aproxima al modelo tridimensional con una menor cantidad de grados de libertad, existe un valor que representa un error considerable en el punto [6,-0.510,-0.1125] en el desplazamiento  $u_y$ , se entiende que en la zona cercana al eje neutro aparecen este tipo de resultados con alta desviación para este componente del desplazamiento nodal.

	<b>DOF</b>	<b>Ux 10<sup>4</sup></b>	<b>Uy 10<sup>5</sup></b>	<b>Uz 10<sup>3</sup></b>
<b>[6,-0.740,0.130]</b>	<b>ANSYS 450303</b>	3.310	-1.325	-5.779
	<b>MATLAB 46494</b>	3.204	-1.325	-5.700
	<b>MATLAB 21546</b>	3.115	-1.326	-5.700
	<b>MATLAB 14742</b>	3.103	-1.334	-5.700
<b>[6,0.478,0.130]</b>	<b>ANSYS 450303</b>	3.285	0.867	-5.767
	<b>MATLAB 46494</b>	3.179	0.867	-5.700
	<b>MATLAB 21546</b>	3.091	0.868	-5.700
	<b>MATLAB 14742</b>	3.078	0.869	-5.700
<b>[6,-0.510,-0.1125]</b>	<b>ANSYS 450303</b>	8.324	-0.167	-5.770
	<b>MATLAB 46494</b>	8.216	-0.275	-5.700
	<b>MATLAB 21546</b>	8.128	-0.270	-5.700
	<b>MATLAB 14742</b>	8.113	-0.282	-5.700
<b>[6,0.16011,-0.154]</b>	<b>ANSYS 450303</b>	9.177	-0.314	-5.759
	<b>MATLAB 46494</b>	9.070	-0.313	-5.700
	<b>MATLAB 21546</b>	8.982	-0.313	-5.700
	<b>MATLAB 14742</b>	8.966	-0.315	-5.700

Tabla 4.9 Valores de desplazamiento en diferentes nodos [6, y, z]  
Fuente: Elaboración propia

En la Figura 4.15 los grados de libertad de la teoría presentada es de 46494 DOF's y se observa que la tendencia es casi exacta comparada al Ansys que usa 450303 DOF's, recopilando y analizando la información de los desplazamientos  $u_x$  vistos en la Tablas 4.7 ,4.8 y 4.9 en diferentes puntos, se entiende que no existe una margen de error considerable para este desplazamiento.

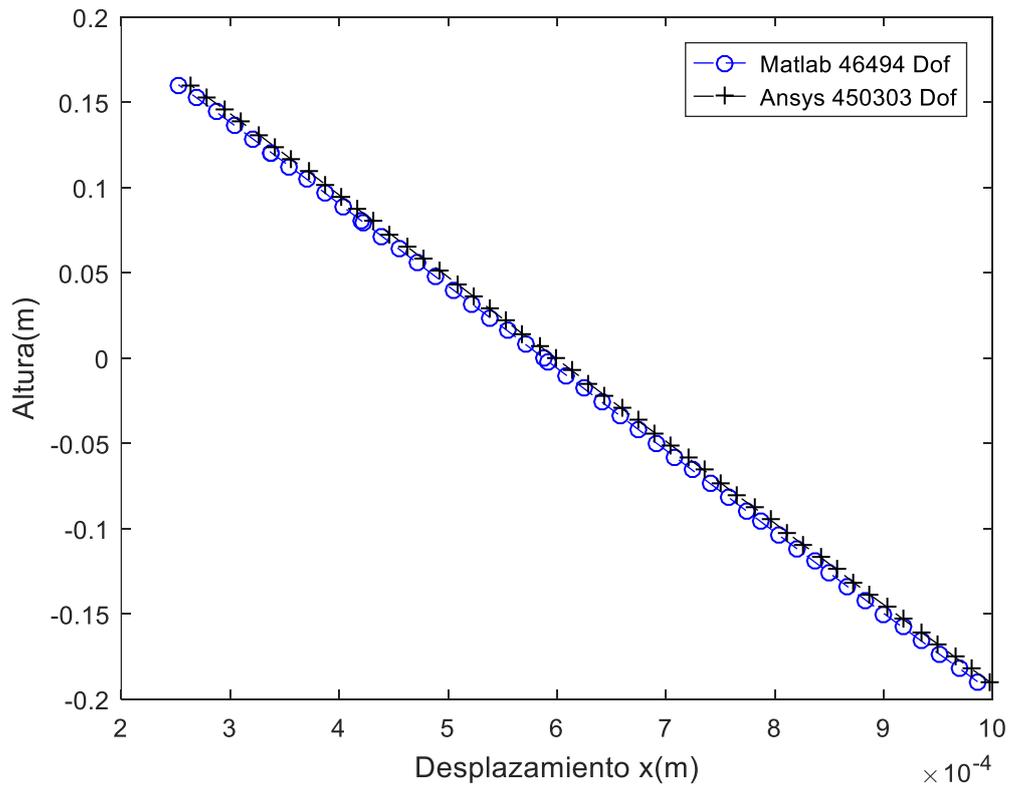


Figura 4.15 Distribución de desplazamiento  $u_x$  a lo largo de un rigidizador [6,-0.510, Z]  
 Fuente: Elaboración propia

Se puede observar en la Tabla 4.10, los valores de desplazamiento obtenidos por la teoría refinada (la presentada) son muy cercanos a los tridimensionales y tienen la misma tendencia, el aumento de grados de libertad para la teoría refinada acortan levemente la discrepancia con el tridimensional. Cabe recalcar que los desplazamientos  $u_y$  son valores sensibles, por lo que en algunos casos no es tan exacto comparado al valor 3D, específicamente en zonas alejadas de los nodos que reciben la carga peatonal de forma directa. En la evaluación para validar la estructura, los desplazamientos  $u_y$  y  $u_x$  no son de consideración, debido a que en esas direcciones no se produce la flecha máxima.

	<b>DOF</b>	<b>Ux 10<sup>4</sup></b>	<b>Uy 10<sup>6</sup></b>	<b>Uz 10<sup>3</sup></b>
<b>[2,-0.4065,0.14038]</b>	<b>ANSYS 450303</b>	8.921	-7.541	-5.765
	<b>MATLAB 46494</b>	8.814	-7.536	-5.700
	<b>MATLAB 21546</b>	8.725	-7.537	-5.700
	<b>MATLAB 14742</b>	8.712	-7.514	-5.700
<b>[2,-0.160,0.035]</b>	<b>ANSYS 450303</b>	6.753	-0.912	-5.763
	<b>MATLAB 46494</b>	6.647	-0.937	-5.700
	<b>MATLAB 21546</b>	6.558	-0.919	-5.700
	<b>MATLAB 14742</b>	6.546	-0.937	-5.700
<b>[2,0.50989,-0.029]</b>	<b>ANSYS 450303</b>	5.416	4.772	-5.769
	<b>MATLAB 46494</b>	5.311	5.145	-5.700
	<b>MATLAB 21546</b>	5.222	5.428	-5.700
	<b>MATLAB 14742</b>	5.212	5.623	-5.700
<b>[2,0.83011,-0.154]</b>	<b>ANSYS 450303</b>	2.802	-5.490	-5.782
	<b>MATLAB 46494</b>	2.697	-4.839	-5.700
	<b>MATLAB 21546</b>	2.608	-4.404	-5.700
	<b>MATLAB 14742</b>	2.598	-4.372	-5.700

Tabla 4.10 Valores de desplazamiento en diferentes nodos  
Fuente: Elaboración propia

#### 4.6.2 Análisis del desplazamiento de la carga del viento

La carga de viento se aplicó en la superficie lateral derecha de la estructura (ver Figura 4.16) el desplazamiento esta con una escala de  $10^3$ , se puede notar que el desplazamiento en  $u_y$  en los nodos cercanos a la superficie lateral en el lado derecho son mayores con respecto a los valores obtenidos cuando solo es aplicado una carga peatonal (ver Figura 4.12). En Tabla 4.11 contrastando con la Tabla 4.7 en el punto [4,1.005, 0.16027] se observa que el desplazamiento  $u_y$  tiene signo negativo, esto se debe a la presión del viento que se dirige en dirección  $-y$ .

En la Figura 4.17 se visualiza la distribución de desplazamiento  $u_y$ , en la parte del rigidizador más cercano a la presión del viento, se observa que tienen valor de  $10^{-5}$ , es insignificante por lo cual es menor a  $\frac{L}{500}$  cumpliendo con lo normado para desplazamiento lateral.

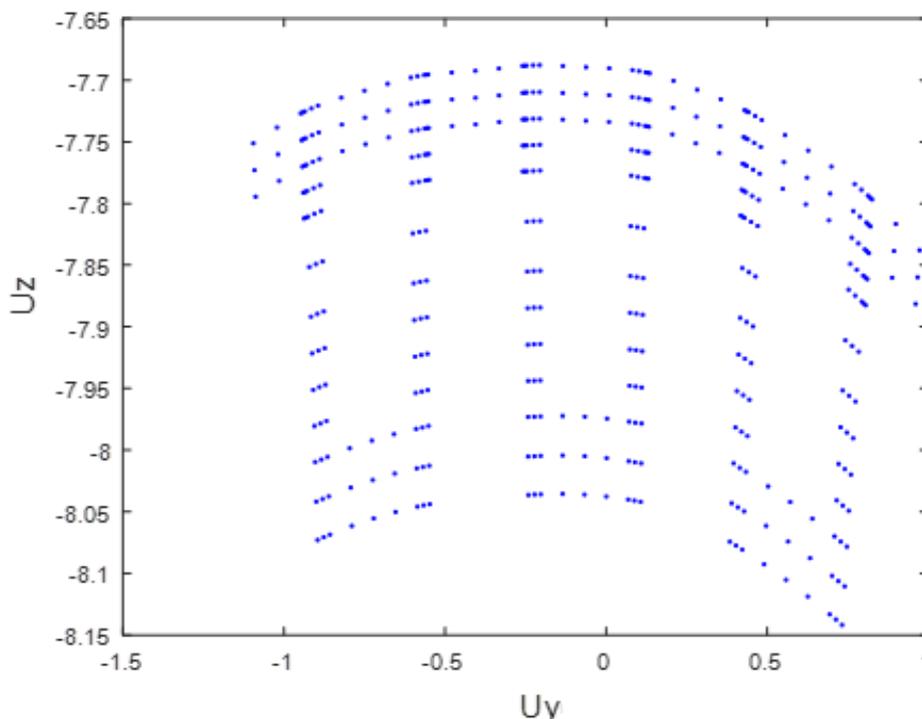


Figura 4.16 Tendencia desplazamiento de los nodos de la sección transversal con presión peatonal y de viento

Fuente: Elaboración propia

	<b>DOF</b>	<b>U<sub>x</sub> 10<sup>4</sup></b>	<b>U<sub>y</sub> 10<sup>5</sup></b>	<b>U<sub>z</sub> 10<sup>3</sup></b>
<b>[2,1.005,0.16027]</b>	<b>ANSYS 450303</b>	9.437	-2.809	-5.857
	<b>MATLAB 46494</b>	9.328	-2.472	-5.800
	<b>MATLAB 21546</b>	9.238	-2.163	-5.800
	<b>MATLAB 14742</b>	9.224	-1.988	-5.800
<b>[4,1.005,0.16027]</b>	<b>ANSYS 450303</b>	6.003	-3.529	-8.162
	<b>MATLAB 46494</b>	5.897	-3.202	-8.100
	<b>MATLAB 21546</b>	5.810	-2.898	-8.100
	<b>MATLAB 14742</b>	5.797	-2.755	-8.100
<b>[4,0.850,-0.119512]</b>	<b>ANSYS 450303</b>	6.003	-10.788	-8.120
	<b>MATLAB 46494</b>	5.897	-10.332	-8.100
	<b>MATLAB 21546</b>	5.809	-9.922	-8.100
	<b>MATLAB 14742</b>	5.797	-9.797	-8.000
<b>[6,0.850, -0.18979]</b>	<b>ANSYS 450303</b>	9.922	-9.719	-5.816
	<b>MATLAB 46494</b>	9.816	-9.292	-5.800
	<b>MATLAB 21546</b>	9.729	-8.920	-5.700
	<b>MATLAB 14742</b>	9.715	-8.820	-5.700

Tabla 4.11 Desplazamientos en la cara lateral del puente peatonal  
Fuente: Elaboración propia

Siguiendo con el análisis, se comprueba nuevamente que los desplazamientos  $u_z$  y  $u_x$  no tiende a variar significativamente en cualquier punto (ver Tabla 4.11), los valores que si presentan desviación son los desplazamientos  $u_y$  que pueden llegar a variar hasta un 11.99 % con respecto al 46494 grados de libertad (ver Figura 4.17).

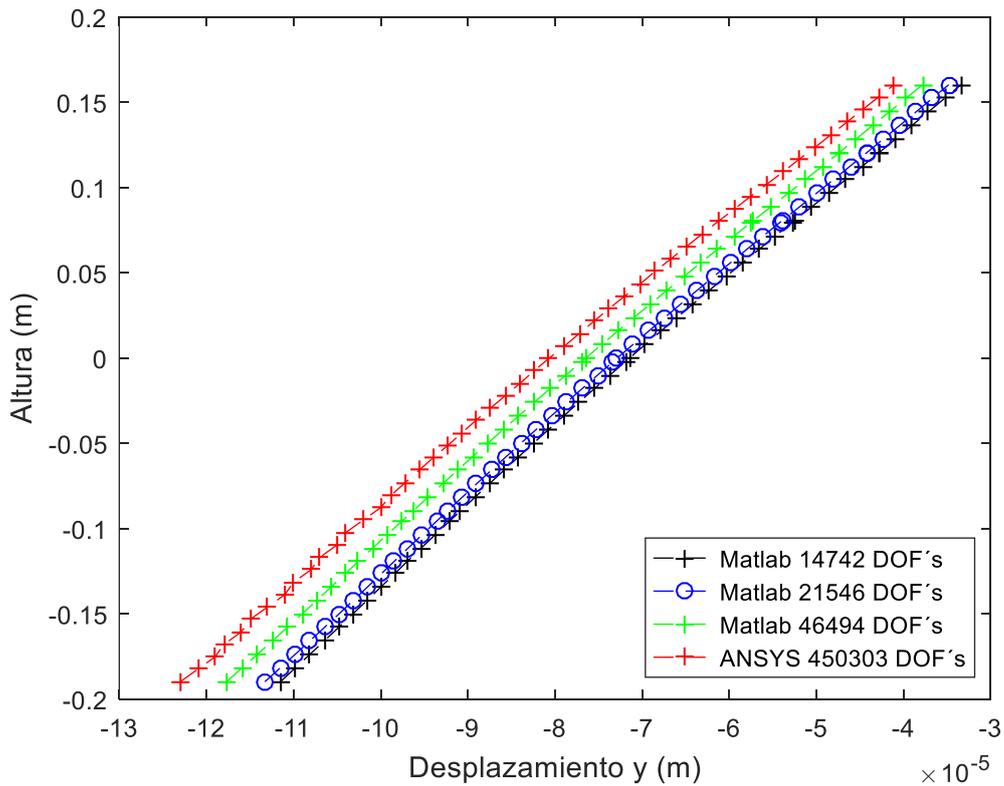


Figura 4.17 Distribución de desplazamiento  $u_y$  en [4,0.830, Z]  
 Fuente: Elaboración propia

En la Figura 4.17, también se puede observar que los valores obtenidos por la teoría refinada, a pesar de que se aumenta los grados de libertad no llegan a ser iguales a los valores tridimensionales. Pero tienen la misma tendencia y se aproximan a un valor que converge.

### 4.6.3 Análisis de los resultados de esfuerzos

En la Tabla 4.12, se muestra los esfuerzos máximos que se generan por las condiciones impuestas de carga tanto peatonal como la del viento y el 25% de los esfuerzos últimos del material. Las especificaciones de diseño para puentes de material compuesto basan su criterio de falla con respecto a la deflexión e indican que los esfuerzos máximos presentados en el puente peatonal deben ser menores que el 25% de los esfuerzos últimos [1].

Además, se muestra que los resultados de esfuerzos obtenidos en la estructura del puente peatonal tanto de compresión, tensión y cortantes son menores al 25% de los esfuerzos últimos, por lo cual cumple con la normativa impuesta, por lo que finalmente se valida la geometría. Debido a que los esfuerzos obtenidos cumplen con lo establecido, no fue necesario considerar en la estructura los diafragmas. Además, se puede observar que todos los esfuerzos de corte obtenidos de la estructura son menores a 6.8 MPa.

	Carga peatonal (MPa)		Carga Peatonal más Carga de viento (MPa)		25% Esfuerzo Ultimo (MPa)	
	Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo	Compresión	Tensión
$\sigma_{xx}$	-4.30	5.06	-4.39	5.12	84	112.25
$\sigma_{yy}$	-3.55	1.77	-3.96	1.84	84	112.25
$\sigma_{zz}$	-9.56	2.41	-10.02	2.54	87	23.75
$\tau_{xy}$	-1.51	1.51	-1.43	1.81	11.3	
$\tau_{yz}$	-1.54	1.54	-1.52	1.64	11.3	
$\tau_{xz}$	-4.83	3.75	-5.65	3.93	6.8	

Tabla 4.12 Esfuerzos de la estructura  
Fuente: Elaboración propia

Los valores obtenidos por la teoría refinada son aproximados a los esfuerzos normales  $\sigma_{xx}$ , en donde se ubica el largo del puente peatonal (ver Tabla 4.13) los otros obtenidos son por medio del software comercial (ver Tabla 4.12). Este resultado se debe a que el método de elementos finitos utilizando polinomios de Lagrange con la condición de simplemente apoyado no se puede obtener con precisión los otros esfuerzos tanto normales como cortantes.

En la literatura evaluada [23] donde se usa el método, se observa que los casos tienen una geometría simple en la sección transversal y además tienen un apoyo en voladizo, por esa razón tiene varios componentes del vector esfuerzo.

DOF's	SOLID 46494 (Pa)	MATLAB 23814 (Pa)	Error (%)
[4,1.005,0.130]	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{xx}$	0.9
	-3414000	-3385011	
[4,-0.160,-0.075]	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{xx}$	-0.8
	1917500	1934267	
[6,0.740,0.130]	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{xx}$	0.8
	-2571400	-2548467	
[6,0.192,0.130]	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{xx}$	0.8
	-2613700	-2590229	
[2,-0.510,0.035]	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{xx}$	-0.2
	-707530	-709450	

Tabla 4.13 Esfuerzos normales en el eje longitudinal sin viento.  
Fuente: Elaboración propia

## CONCLUSIONES

El puente peatonal de fibra reforzada de plástico diseñado en la presente tesis fue analizado con una formulación unificada por el método de elementos finitos. Este el primer estudio por medio de este método que permite obtener los mismos resultados utilizando menos grados de libertad comparado al software comercial para la obtención de desplazamientos esenciales para validar la estructura de un puente peatonal.

Se diseñó la estructura del puente peatonal de fibra de vidrio compuesto por dos componentes. El primero un panel de sección constante con un espesor de 39.78 mm y el segundo un rigidizador perfil sombrero de sección constante que proporciona la rigidez del puente peatonal.

Se calculó las dimensiones del panel y del rigidizador mediante la norma ISO 12215-05 usado en el ámbito naval con requerimientos geométricos. Se realizaron simulaciones para hacer las modificaciones en el diseño del puente peatonal para obtener la deflexión menor a  $\frac{L}{500}$  según lo requerido por la norma AASHTO.

Se realizó la programación de elementos finitos en el software Matlab para calcular el campo desplazamiento en cualquier ubicación de la estructura y se obtuvo valores de esfuerzos con respecto al eje axial.

Los valores de desplazamiento dentro del puente peatonal se predijeron mediante la formulación generalizada utilizando el método de elementos finitos con polinomios de Lagrange siendo la máxima deflexión 8.1 mm y los valores de esfuerzos son menores al 25% de los esfuerzos últimos del material cumpliendo lo requerido por la norma AASHTO.

## **RECOMENDACIONES**

La codificación de la formulación generalizada se debe verificar constantemente la digitación de esta misma, hay grandes posibilidades de digitalizar mal el contenido, además es necesario siempre reproducir el trabajo de investigación en donde se utiliza el mismo método para validar la codificación base.

Al realizar las simulaciones en Matlab se recomienda que en el post proceso se automatice la obtención de resultados para poder evaluar diferentes puntos, porque cada ejecución puede costar valioso tiempo para el análisis de los resultados.

Si se desea evaluar la estructura del puente peatonal en ANSYS Workbench reduciendo el mallado a 20 mm es necesario usar una computadora con gran capacidad de cálculo ya que el tiempo de procesamiento es demasiado alto.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] American Association of State Highway and Transportation Officials, Guide specifications for design of FRP pedestrian bridges, Washington: AASHTO, 2008.
- [2] L. Larsson, R. E Eliasson y M. Orych, Principles of yacht design, Marine/MacGraw-Hill Education, 2014.
- [3] A. Miravete, Los nuevos materiales en la construccion, Barcelona: Reverte S.A, 1995.
- [4] D. Hull, Materiales Compuestos, Barcelona: Reverte S.A., 1987.
- [5] W. D.Callister, Introduccion a la ciencia e ingenieria de los materiales. II, Volumen 2, Barcelona: Reverte, 1996.
- [6] M. d. T. y. C. R. d. Peru, *Guia para inspeccion de puentes*, Lima: Ministerio de Transporte y Comunicaciones Republica del Peru, 2006.
- [7] F. europe, «Puentes de bicicleta,» [En línea]. Available: [http://img.archiexpo.com/images\\_ae/photo-g/146011-8347443.jpg](http://img.archiexpo.com/images_ae/photo-g/146011-8347443.jpg).
- [8] M.Bizarro, «Historia de los materiales,» 2013. [En línea]. Available: <http://www.iim.unam.mx/mbizarro/1-Historia%20de%20los%20materiales%202013-2.pdf>.
- [9] «Evolución de la vivienda a lo largo de la historia,» [En línea]. Available: <https://www.timetoast.com/timelines/evolucion-de-la-vivienda>.
- [10] Applynano Solutions, «Materiales compuestos, una solucion en la industria aeronautica,» 16 01 2018. [En línea]. Available: <http://www.applynano.com/es/materiales-compuestos-una-solucion-en-la-industria-aeronautica/>.
- [11] Y. Webin, «Mechanics of Structure Genome,» [En línea]. Available: <https://cdmhub.org/resources/1133/download/MSGPurdue.pdf>.
- [12] A. A. Nieves, Gestion del Mantenimiento de instalaciones de energia eolica, Editorial Vértice, 2011.
- [13] «Temas noticias Eólica,» [En línea]. Available: <https://www.evwind.com/2012/10/30/eolica-en-puerto-rico-inicia-operaciones-el-parque-eolico-de-gestamp-con-13-aerogeneradores/>.
- [14] M. A. Perez, «3.4 Ventajas y desventajas del refuerzo FRP,» de *Aplicaciones avanzadas de materiales compuestos en la obra civil y edificación.*, Barcelona, Omnia Publisher SL, 2014, pp. 57-59.

- [15] Y.-F. Li, S. Badjie, W. Chen y Y.-T. Chiu, «Case study of first all-GFRP pedestrian bridge in Taiwan,» *Case Studies in Construction Materials*, nº 1, pp. 83-95, 2014.
- [16] J. Cervera, «Leonardo Da Vinci y la flexión de vigas,» *Sylva Cluis, Revista de Historia de la Ciencia*, vol. 1, nº 3, pp. 35-39, 1987.
- [17] Wikipedia, «Leonardo's Crossbow,» [En línea]. Available: [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7d/Leonardo\\_crossbow.JPG](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7d/Leonardo_crossbow.JPG).
- [18] E. Carrera y M. Petrolo, «Guidelines and Recommendations to Construct Theories for Metallic and Composite Plates,» *AIAA Journal*, vol. 48, nº 12, pp. 2852-2866, December 2010.
- [19] Wikipedia, «Teoría de vigas de Timoshenko,» [En línea]. Available: [https://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa\\_de\\_vigas\\_de\\_Timoshenko](https://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_vigas_de_Timoshenko).
- [20] E. Carrera, G. Giunta y M. Petrolo, *Beam structures: Classical and Advanced theories*, United kingdom: John Wiles & Sons,Ltd, 2011.
- [21] Catapano, Giunta, Belouettar y Carrera, «Static analysis of laminated beams via a unified formulation,» *Composite Structures*, nº 94, pp. 75-83, 2011.
- [22] J. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*, CRC PRESS, 2004.
- [23] E. Carrera y M. Petrolo, «Refined beam elements with only displacement variables and plate/shell capabilities,» *Springer Science Media B.V*, 25 August 2011.
- [24] E. Carrera, M. Cinefra, M. Petrolo y E. Zappino, *Finite Element Analysis of Structures through unified Formulation*, United Kingdom: John Wiley & Sons Ltd, 2014.
- [25] S. Attesdhamuddin y M. G. Yuwaraj , «Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature,» *Composite Structures*, vol. 171, pp. 486-504, 2017.
- [26] M. d. T. y. comunicaciones, «Manual de puentes,» [En línea]. Available: [http://transparencia.mtc.gob.pe/idm\\_docs/P\\_recientes/8044.pdf](http://transparencia.mtc.gob.pe/idm_docs/P_recientes/8044.pdf).
- [27] L. Euler, *De curvis elasticis*, Lausanne: Bousquet, 1744.
- [28] T. SP, de *On the corrections for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*, *Philos Mag*, 1922, pp. 41:744-746.
- [29] N. VV, *Theory of elasticity*, Elmsford: Pergamon, 1961.
- [30] R. S. Netto, «FISICANET,» 2000. [En línea]. Available: <https://www.fisicanet.com.ar/fisica/elasticidad/ap01-elasticidad-plasticidad.php>. [Último acceso: 2019 07 14].

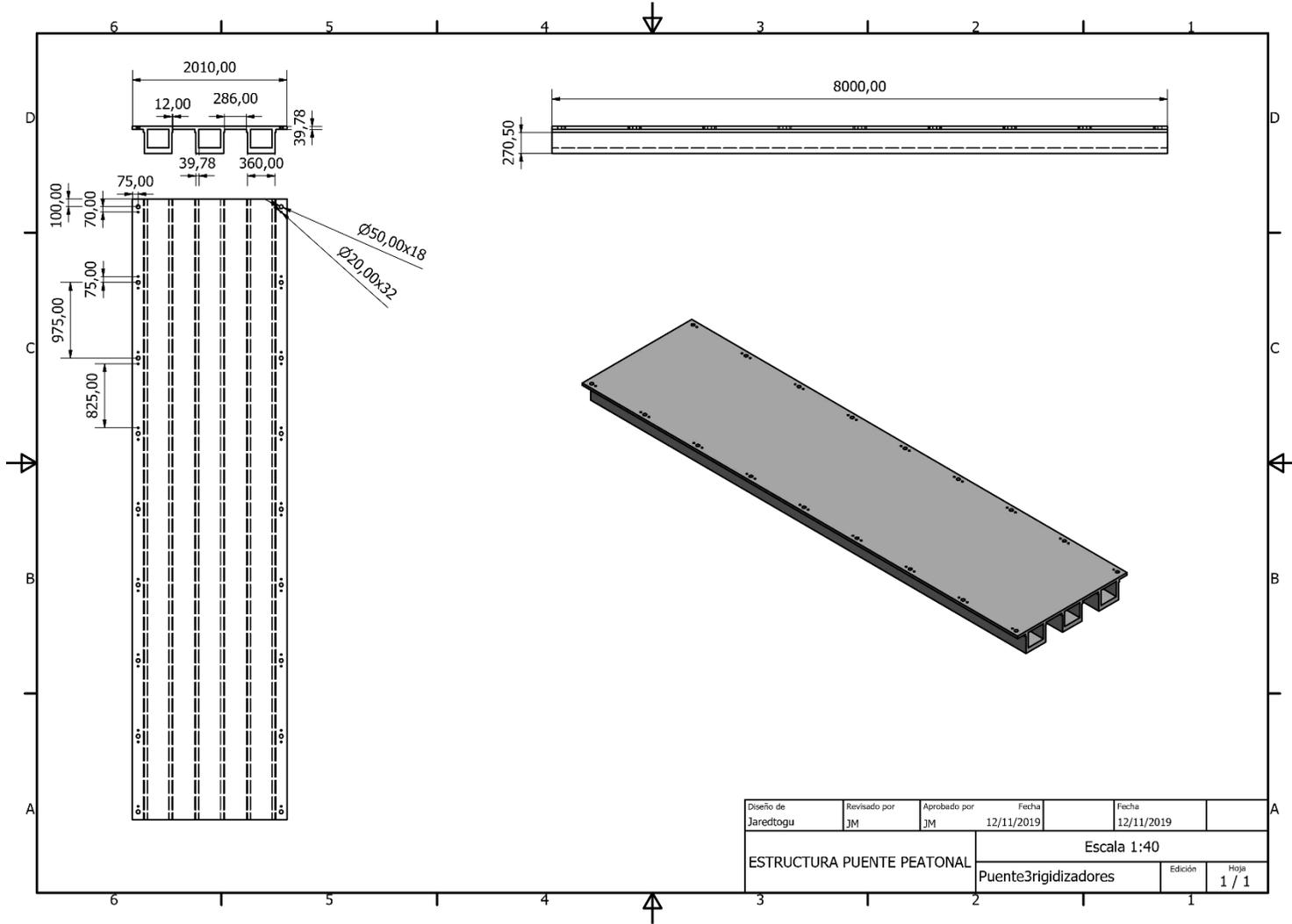
- [31] O. Zienkiewicz, R. L. Taylor y D. Fox, *The finite element method for solid and structural mechanics*, Oxford: Butterworth-Heinemann, 2014.
- [32] J. Chróscielewski, M. Miskiewicz, Ł. Pyrzowski y B. Sobczyk, «A novel sandwich footbridge - Practical application of laminated composites in bridge design and in situ measurements of static response,» *Composite Part B*, vol. 126, pp. 153-161, 2017.
- [33] M. Groover, *Fundamentos de manufactura moderna*, Mexico: Mc Graw Hill Interamericana, 2007.
- [34] C. Boay y Y. Wee , «Coupling effects in bending buckling and free vibrations of generally laminated composite beams,» *Compos Sci Technol*, vol. 68, pp. 1664-1670, 2008.
- [35] M. Hu, H. Kolsky y Pipkin AC, «Bending theory for fiber reinforced beams,» *Journal of Composite Materials*, vol. 19, pp. 235-49, 1985.
- [36] E. Carrera y Giunta G, «Refined beam theories based on unified formulation,» *International Journal of Applied Mechanics*, vol. 2, pp. 117-43, 2010.
- [37] G. Giunta , E. Carrera, F. Biscani y S. Belouettar, «Analysis of thin-walled beams via a one-dimensional unified formulation through a Navier type solution,» *International Journal of Applied Mechanics*, vol. 3, nº 3, pp. 407-34, 2011.
- [38] E. Carrera y A. Pagani, «Multi-line enhanced beam model for the analysis of laminated,» *Composite Structures : Part B*, nº 57, pp. 112-9, 2014.
- [39] M. Filippi , A. Pagani, M. Petrolo, G. Colonna y E. Carrera, «Static and free vibration analysis of laminated beams by refined theory based on chebyshev Polynomials,» *Composite Structures*, vol. 132, pp. 1248-59, 2015.
- [40] E. Carrera, M. Filippi y E. Zappino, «Free vibrations analysis of laminated by polynomial, trigonometric, exponential and zig-zag theories,» *Journal of Composite Material*, vol. 48, nº 19, pp. 2299-2316, 2014.
- [41] ANSYS, «ANSYS SpaceClaim Capabilities,» [En línea]. Available: <http://www.ansys.com/products/3d-design/ansys-spaceclaim/spaceclaim-capabilities#cap1>.
- [42] G. R. Piura, «Portal de transparencia,» [En línea]. Available: <http://regionpiura.gob.pe/index.php?pag=17&id=1369&per=2015>.

# **ANEXOS**

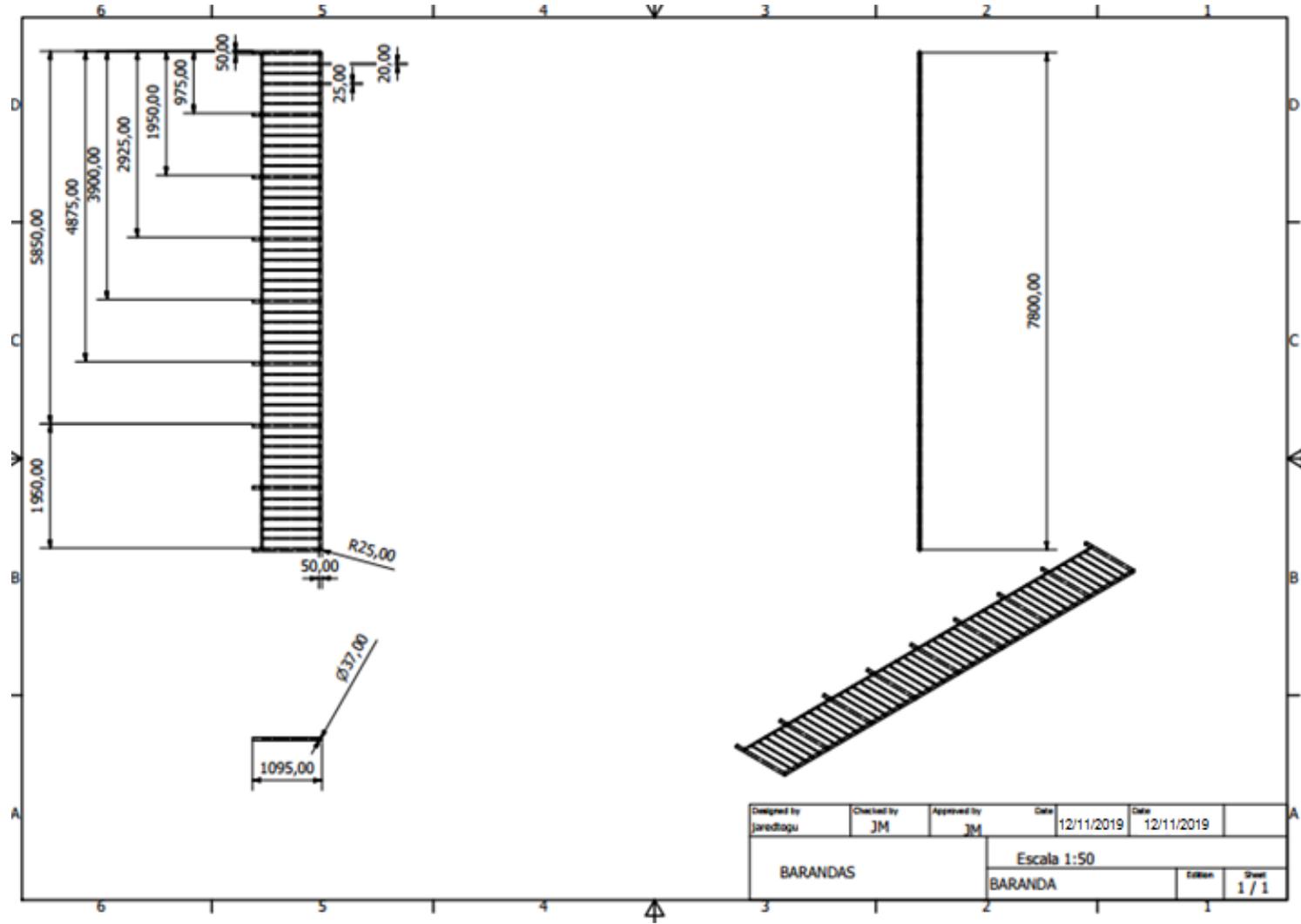
Anexo 1 Valores de los pesos y puntos de Gauss respectivamente

n=1		
1	2.0000000000000000	0.0000000000000000
n=2		
1	1.0000000000000000	-0.5773502691896257
2	1.0000000000000000	0.5773502691896257
n=3		
1	0.8888888888888888	0.0000000000000000
2	0.5555555555555556	-0.7745966692414834
3	0.5555555555555556	0.7745966692414834
n=4		
1	0.6521451548625461	-0.3399810435848563
2	0.6521451548625461	0.3399810435848563
3	0.3478548451374538	-0.8611363115940526
4	0.3478548451374538	0.8611363115940526
n=5		
1	0.5688888888888889	0.0000000000000000
2	0.4786286704993665	-0.5384693101056831
3	0.4786286704993665	0.5384693101056831
4	0.2369268850561891	-0.9061798459386640
5	0.2369268850561891	0.9061798459386640
n=6		
1	0.3607615730481386	0.6612093864662645
2	0.3607615730481386	-0.6612093864662645
3	0.4679139345726910	-0.2386191860831969
4	0.4679139345726910	0.2386191860831969
5	0.1713244923791704	-0.9324695142031521
6	0.1713244923791704	0.9324695142031521

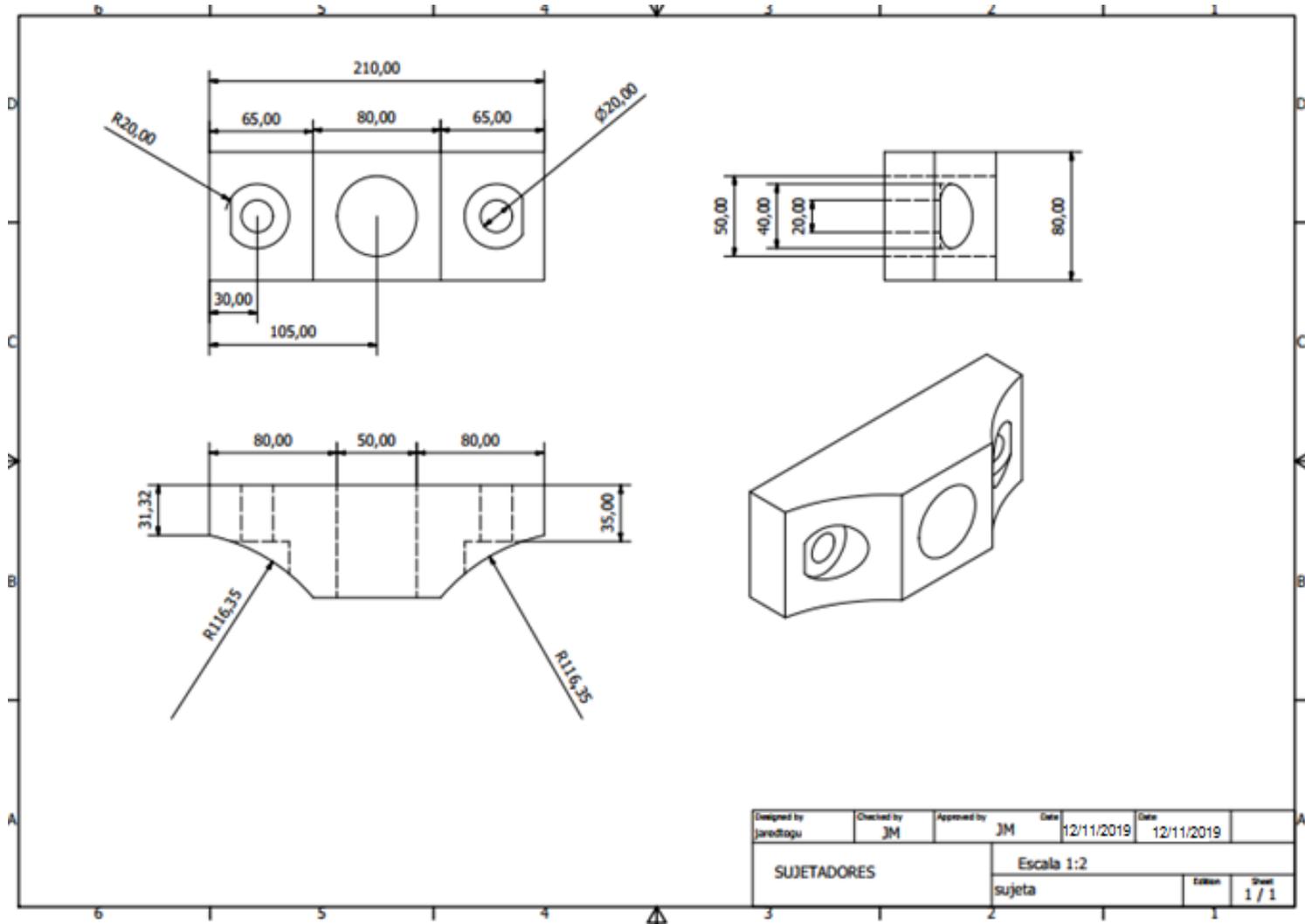
## Anexo 2 Plano de la estructura del puente peatonal



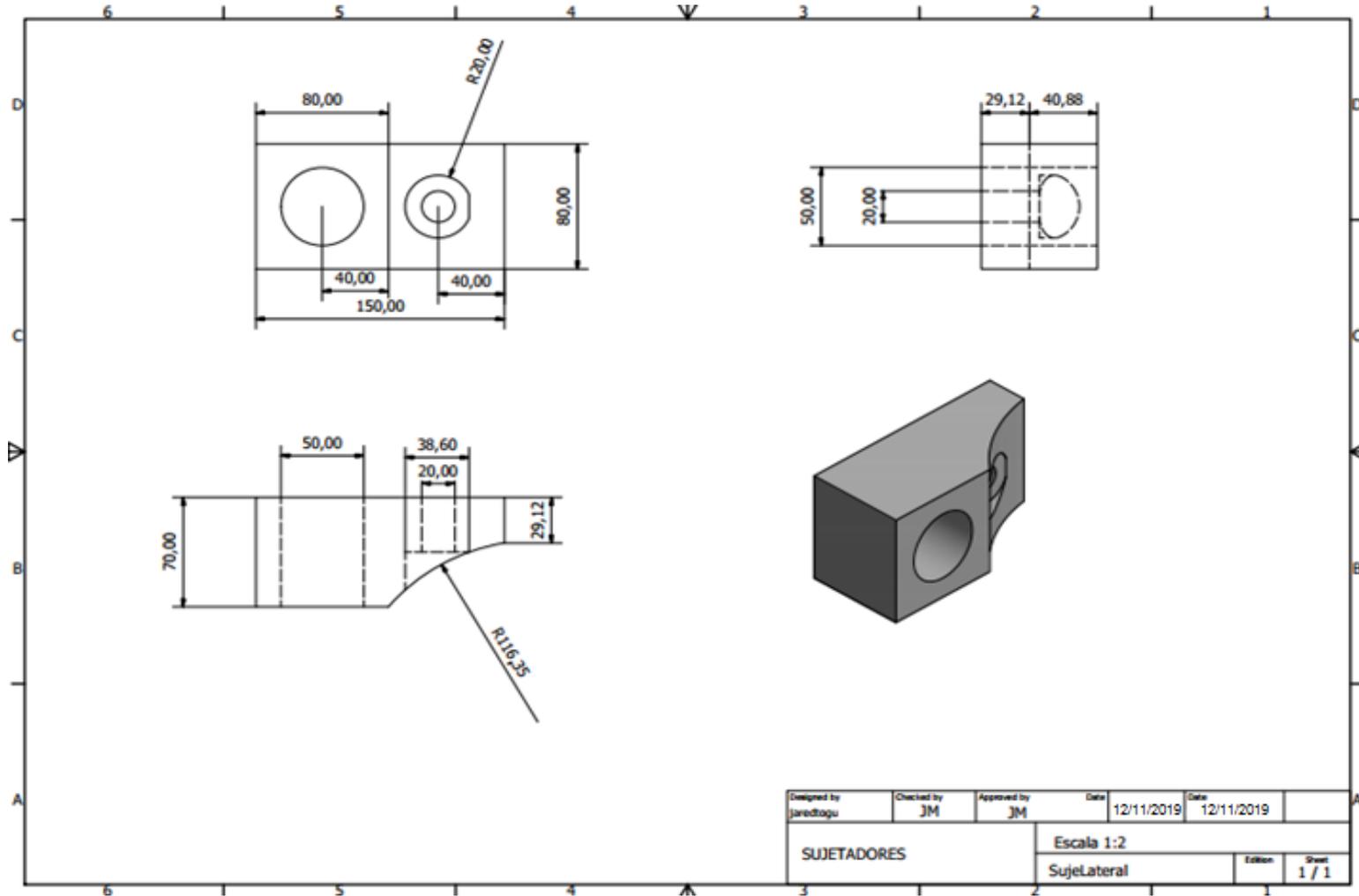
### Anexo 3 Plano de la baranda



### Anexo 4 Plano de los sujetadores intermedios



### Anexo 5 Plano de los sujetadores laterales



## Anexo 6 Código general

```
clc
clear
close all
tic
%% =====
%                               INPUT
%=====
% Geometría

L=8; % longitud de la viga

nodos_secc= [ -1.005    0.16027;
              -0.9335   0.16027;
              -0.862    0.16027;
              -0.856    0.16027;
              -0.850    0.16027;
              -0.83011  0.16027;
              -0.81022  0.16027;
              -0.74011  0.16027;
              -0.670    0.16027;
              -0.59989  0.16027;
              -0.52978  0.16027;
              -0.50989  0.16027;
              -0.49     0.16027;
              -0.484    0.16027;
              -0.478    0.16027;
              -0.4065   0.16027;
              -0.335    0.16027;
              -0.2635   0.16027;
              -0.192    0.16027;
              -0.186    0.16027;
              -0.180    0.16027;
              -0.16011  0.16027;
              -0.14022  0.16027;
              -0.07011  0.16027;
               0         0.16027;
               0.07011  0.16027;
               0.14022  0.16027;
               0.16011  0.16027;
               0.180    0.16027;
               0.186    0.16027;
               0.192    0.16027;
               0.2635   0.16027;
               0.335    0.16027;
               0.4065   0.16027;
               0.478    0.16027;
               0.484    0.16027;
               0.490    0.16027;
               0.50989  0.16027;
               0.52978  0.16027;
               0.59989  0.16027;
               0.670    0.16027;
               0.74011  0.16027;
               0.81022  0.16027;
               0.83011  0.16027;
               0.850    0.16027;
               0.856    0.16027;
               0.862    0.16027;
               0.9335   0.16027;
               1.005    0.16027;
              -1.005    0.14038;
```

-0.9335 0.14038;  
-0.862 0.14038;  
-0.856 0.14038;  
-0.850 0.14038;  
-0.83011 0.14038;  
-0.81022 0.14038;  
-0.74011 0.14038;  
-0.670 0.14038;  
-0.59989 0.14038;  
-0.52978 0.14038;  
-0.50989 0.14038;  
-0.490 0.14038;  
-0.484 0.14038;  
-0.478 0.14038;  
-0.4065 0.14038;  
-0.335 0.14038;  
-0.2635 0.14038;  
-0.192 0.14038;  
-0.186 0.14038;  
-0.180 0.14038;  
-0.16011 0.14038;  
-0.14022 0.14038;  
-0.07011 0.14038;  
0 0.14038;  
0.07011 0.14038;  
0.14022 0.14038;  
0.16011 0.14038;  
0.180 0.14038;  
0.186 0.14038;  
0.192 0.14038;  
0.2635 0.14038;  
0.335 0.14038;  
0.4065 0.14038;  
0.478 0.14038;  
0.484 0.14038;  
0.490 0.14038;  
0.50989 0.14038;  
0.52978 0.14038;  
0.59989 0.14038;  
0.670 0.14038;  
0.74011 0.14038;  
0.81022 0.14038;  
0.83011 0.14038;  
0.850 0.14038;  
0.856 0.14038;  
0.862 0.14038;  
0.9335 0.14038;  
1.005 0.14038;  
-1.005 0.12049;  
-0.9335 0.12049;  
-0.862 0.12049;  
-0.856 0.12049;  
-0.850 0.12049;  
-0.83011 0.12049;  
-0.81022 0.12049;  
-0.74011 0.12049;  
-0.670 0.12049;  
-0.59989 0.12049;  
-0.52978 0.12049;  
-0.50989 0.12049;  
-0.490 0.12049;  
-0.484 0.12049;  
-0.478 0.12049;

-0.4065 0.12049;  
-0.335 0.12049;  
-0.2635 0.12049;  
-0.192 0.12049;  
-0.186 0.12049;  
-0.180 0.12049;  
-0.16011 0.12049;  
-0.14022 0.12049;  
-0.07011 0.12049;  
0 0.12049;  
0.07011 0.12049;  
0.14022 0.12049;  
0.16011 0.12049;  
0.180 0.12049;  
0.186 0.12049;  
0.192 0.12049;  
0.2635 0.12049;  
0.335 0.12049;  
0.4065 0.12049;  
0.478 0.12049;  
0.484 0.12049;  
0.490 0.12049;  
0.50989 0.12049;  
0.52978 0.12049;  
0.59989 0.12049;  
0.670 0.12049;  
0.74011 0.12049;  
0.81022 0.12049;  
0.83011 0.12049;  
0.850 0.12049;  
0.856 0.12049;  
0.862 0.12049;  
0.9335 0.12049;  
1.005 0.12049;  
-0.862 0.1006;  
-0.856 0.1006;  
-0.850 0.1006;  
-0.83011 0.1006;  
-0.81022 0.1006;  
-0.52978 0.1006;  
-0.50989 0.1006;  
-0.490 0.1006;  
-0.484 0.1006;  
-0.478 0.1006;  
-0.192 0.1006;  
-0.186 0.1006;  
-0.180 0.1006;  
-0.16011 0.1006;  
-0.14022 0.1006;  
0.14022 0.1006;  
0.16011 0.1006;  
0.180 0.1006;  
0.186 0.1006;  
0.192 0.1006;  
0.478 0.1006;  
0.484 0.1006;  
0.490 0.1006;  
0.50989 0.1006;  
0.52978 0.1006;  
0.81022 0.1006;  
0.83011 0.1006;  
0.850 0.1006;  
0.856 0.1006;

0.862	0.1006;
-0.862	0.08071;
-0.856	0.08071;
-0.850	0.08071;
-0.83011	0.08071;
-0.81022	0.08071;
-0.52978	0.08071;
-0.50989	0.08071;
-0.490	0.08071;
-0.484	0.08071;
-0.478	0.08071;
-0.192	0.08071;
-0.186	0.08071;
-0.180	0.08071;
-0.16011	0.08071;
-0.14022	0.08071;
0.14022	0.08071;
0.16011	0.08071;
0.180	0.08071;
0.186	0.08071;
0.192	0.08071;
0.478	0.08071;
0.484	0.08071;
0.490	0.08071;
0.50989	0.08071;
0.52978	0.08071;
0.81022	0.08071;
0.83011	0.08071;
0.850	0.08071;
0.856	0.08071;
0.862	0.08071;
-0.850	0.040355;
-0.83011	0.040355;
-0.81022	0.040355;
-0.52978	0.040355;
-0.50989	0.040355;
-0.490	0.040355;
-0.180	0.040355;
-0.16011	0.040355;
-0.14022	0.040355;
0.14022	0.040355;
0.16011	0.040355;
0.180	0.040355;
0.490	0.040355;
0.50989	0.040355;
0.52978	0.040355;
0.81022	0.040355;
0.83011	0.040355;
0.850	0.040355;
-0.850	0;
-0.83011	0;
-0.81022	0;
-0.52978	0;
-0.50989	0;
-0.490	0;
-0.180	0;
-0.16011	0;
-0.14022	0;
0.14022	0;
0.16011	0;
0.180	0;
0.490	0;
0.50989	0;

0.52978	0;
0.81022	0;
0.83011	0;
0.850	0;
-0.850	-0.029878;
-0.83011	-0.029878;
-0.81022	-0.029878;
-0.52978	-0.029878;
-0.50989	-0.029878;
-0.490	-0.029878;
-0.180	-0.029878;
-0.16011	-0.029878;
-0.14022	-0.029878;
0.14022	-0.029878;
0.16011	-0.029878;
0.180	-0.029878;
0.490	-0.029878;
0.50989	-0.029878;
0.52978	-0.029878;
0.81022	-0.029878;
0.83011	-0.029878;
0.850	-0.029878;
-0.850	-0.059756;
-0.83011	-0.059756;
-0.81022	-0.059756;
-0.52978	-0.059756;
-0.50989	-0.059756;
-0.490	-0.059756;
-0.180	-0.059756;
-0.16011	-0.059756;
-0.14022	-0.059756;
0.14022	-0.059756;
0.16011	-0.059756;
0.180	-0.059756;
0.490	-0.059756;
0.50989	-0.059756;
0.52978	-0.059756;
0.81022	-0.059756;
0.83011	-0.059756;
0.850	-0.059756;
-0.850	-0.089634;
-0.83011	-0.089634;
-0.81022	-0.089634;
-0.52978	-0.089634;
-0.50989	-0.089634;
-0.490	-0.089634;
-0.180	-0.089634;
-0.16011	-0.089634;
-0.14022	-0.089634;
0.14022	-0.089634;
0.16011	-0.089634;
0.180	-0.089634;
0.490	-0.089634;
0.50989	-0.089634;
0.52978	-0.089634;
0.81022	-0.089634;
0.83011	-0.089634;
0.850	-0.089634;
-0.850	-0.119512;
-0.83011	-0.119512;
-0.81022	-0.119512;
-0.74011	-0.119512;
-0.670	-0.119512;

-0.59989 -0.119512;  
-0.52978 -0.119512;  
-0.50989 -0.119512;  
-0.490 -0.119512;  
-0.180 -0.119512;  
-0.16011 -0.119512;  
-0.14022 -0.119512;  
-0.07011 -0.119512;  
0 -0.119512;  
0.07011 -0.119512;  
0.14022 -0.119512;  
0.16011 -0.119512;  
0.180 -0.119512;  
0.490 -0.119512;  
0.50989 -0.119512;  
0.52978 -0.119512;  
0.59989 -0.119512;  
0.670 -0.119512;  
0.74011 -0.119512;  
0.81022 -0.119512;  
0.83011 -0.119512;  
0.850 -0.119512;  
-0.850 -0.154651;  
-0.83011 -0.154651;  
-0.81022 -0.154651;  
-0.74011 -0.154651;  
-0.670 -0.154651;  
-0.59989 -0.154651;  
-0.52978 -0.154651;  
-0.50989 -0.154651;  
-0.490 -0.154651;  
-0.180 -0.154651;  
-0.16011 -0.154651;  
-0.14022 -0.154651;  
-0.07011 -0.154651;  
0 -0.154651;  
0.07011 -0.154651;  
0.14022 -0.154651;  
0.16011 -0.154651;  
0.180 -0.154651;  
0.490 -0.154651;  
0.50989 -0.154651;  
0.52978 -0.154651;  
0.59989 -0.154651;  
0.670 -0.154651;  
0.74011 -0.154651;  
0.81022 -0.154651;  
0.83011 -0.154651;  
0.850 -0.154651;  
-0.850 -0.18979;  
-0.83011 -0.18979;  
-0.81022 -0.18979;  
-0.74011 -0.18979;  
-0.670 -0.18979;  
-0.59989 -0.18979;  
-0.52978 -0.18979;  
-0.50989 -0.18979;  
-0.490 -0.18979;  
-0.180 -0.18979;  
-0.16011 -0.18979;  
-0.14022 -0.18979;  
-0.07011 -0.18979;  
0 -0.18979;

```

0.07011      -0.18979;
 0.14022      -0.18979;
 0.16011      -0.18979;
 0.180        -0.18979;
 0.490        -0.18979;
 0.50989      -0.18979;
 0.52978      -0.18979;
 0.59989      -0.18979;
 0.670        -0.18979;
 0.74011      -0.18979;
 0.81022      -0.18979;
 0.83011      -0.18979;
 0.850        -0.18979];

conec_secc= [99 100 101 52 3 2 1 50 51;
101 102 103 54 5 4 3 52 53;
103 104 105 56 7 6 5 54 55;
105 106 107 58 9 8 7 56 57;
107 108 109 60 11 10 9 58 59;
109 110 111 62 13 12 11 60 61;
111 112 113 64 15 14 13 62 63;
113 114 115 66 17 16 15 64 65;
115 116 117 68 19 18 17 66 67;
117 118 119 70 21 20 19 68 69;
119 120 121 72 23 22 21 70 71;
121 122 123 74 25 24 23 72 73;
123 124 125 76 27 26 25 74 75;
125 126 127 78 29 28 27 76 77;
127 128 129 80 31 30 29 78 79;
129 130 131 82 33 32 31 80 81;
131 132 133 84 35 34 33 82 83;
133 134 135 86 37 36 35 84 85;
135 136 137 88 39 38 37 86 87;
137 138 139 90 41 40 39 88 89;
139 140 141 92 43 42 41 90 91;
141 142 143 94 45 44 43 92 93;
143 144 145 96 47 46 45 94 95;
145 146 147 98 49 48 47 96 97;
178 179 180 150 103 102 101 148 149;
180 181 182 152 105 104 103 150 151;
183 184 185 155 111 110 109 153 154;
185 186 187 157 113 112 111 155 156;
188 189 190 160 119 118 117 158 159;
190 191 192 162 121 120 119 160 161;
193 194 195 165 127 126 125 163 164;
195 196 197 167 129 128 127 165 166;
198 199 200 170 135 134 133 168 169;
200 201 202 172 137 136 135 170 171;
203 204 205 175 143 142 141 173 174;
205 206 207 177 145 144 143 175 176;
226 227 228 210 182 181 180 208 209;
229 230 231 213 185 184 183 211 212;
232 233 234 216 192 191 190 214 215;
235 236 237 219 195 194 193 217 218;
238 239 240 222 202 201 200 220 221;
241 242 243 225 205 204 203 223 224;
262 263 264 246 228 227 226 244 245;
265 266 267 249 231 230 229 247 248;
268 269 270 252 234 233 232 250 251;
271 272 273 255 237 236 235 253 254;
274 275 276 258 240 239 238 256 257;
277 278 279 261 243 242 241 259 260;
298 299 300 282 264 263 262 280 281;

```

```

304 305 306 285 267 266 265 283 284;
307 308 309 288 270 269 268 286 287;
313 314 315 291 273 272 271 289 290;
316 317 318 294 276 275 274 292 293;
322 323 324 297 279 278 277 295 296;
352 353 354 327 300 299 298 325 326;
354 355 356 329 302 301 300 327 328;
356 357 358 331 304 303 302 329 330;
358 359 360 333 306 305 304 331 332;
361 362 363 336 309 308 307 334 335;
363 364 365 338 311 310 309 336 337;
365 366 367 340 313 312 311 338 339;
367 368 369 342 315 314 313 340 341;
370 371 372 345 318 317 316 343 344;
372 373 374 347 320 319 318 345 346;
374 375 376 349 322 321 320 347 348;
376 377 378 351 324 323 322 349 350];

```

```

%%                                NUMERO TOTAL DE SECCIONES
num_secc=length(conec_secc(:,1));
%%                                MALLADO
%%=====
% Malla en X
num_nodos_elem=5;                % número de nodos por elemento
num_elementos=4;                 % número de elementos

%% Carga
P1=-4070;
P2=-2087.4;
Pv=0;
%% =====
%                                PRE-PROCESSESOR UNIT
%=====
% Propiedades del material %1.
E_1=23400*10^6;      E_2=23400*10^6;      E_3=7780*10^6;
G_13=2300*10^6;     G_12=3520*10^6;     G_23=2300*10^6;
v_12=0.153;         v_13=0.593;         v_23=0.593;
v_21=(v_12*E_2)/E_1; v_31=(v_13*E_3)/E_1; v_32=(v_23*E_3)/E_2;

delta=(1-v_12*v_21-v_23*v_32-v_31*v_13-2*v_21*v_32*v_13)/(E_1*E_2*E_3);

% Propiedades del material %2
E_a=23400*10^6;     E_b=7780*10^6;     E_c=23400*10^6;
G_ac=3520*10^6;     G_ab=2300*10^6;     G_bc=2300*10^6;
v_ab=0.593;         v_ac=0.153;         v_bc=0.197;
v_ba=(v_ab*E_b)/E_a; v_ca=(v_ac*E_c)/E_a; v_cb=(v_bc*E_c)/E_b;

delta2=(1-v_ab*v_ba-v_bc*v_cb-v_ca*v_ac-2*v_ba*v_cb*v_ac)/(E_a*E_b*E_c);

%% Mechanical properties %1 -----> ORTOTROPIC %1

C11=(1-v_23*v_32)/(E_2*E_3*delta);
C12=(v_21+v_31*v_23)/(E_2*E_3*delta);
C13=(v_31+v_21*v_32)/(E_2*E_3*delta);
C22=(1-v_13*v_31)/(E_1*E_3*delta);
C23=(v_32+v_12*v_31)/(E_1*E_3*delta);
C33=(1-v_12*v_21)/(E_1*E_2*delta);
C44=G_23;
C55=G_13;
C66=G_12;

```

```

%%% Mechanical properties %2 -----> ORTOTROPIC %2

C11a=(1-v_bc*v_cb)/(E_b*E_c*delta2);
C12a=(v_ba+v_ca*v_bc)/(E_b*E_c*delta2);
C13a=(v_ca+v_ba*v_cb)/(E_b*E_c*delta2);
C22a=(1-v_ac*v_ca)/(E_a*E_c*delta2);
C23a=(v_cb+v_ab*v_ca)/(E_a*E_c*delta2);
C33a=(1-v_ab*v_ba)/(E_a*E_b*delta2);
C44a=G_bc;
C55a=G_ac;
C66a=G_ab;

%%%                                Largo de la viga
num_total_nodos=(num_nodos_elem-1)*num_elementos+1;
num_total_nodos_secc=length(nodos_secc(:,1)); % Primera columna

%%%                                MESH
[CONEC, GLX]=mesh1d(num_nodos_elem,num_total_nodos,num_elementos, L); %GLX
Ubicación en metros de los nodos a lo largo del eje X                                %CONEC

Enumeración de los nodos por elemento
%%%
Li=linspace(0,L,num_elementos+1);
Ll=Li(2:(num_elementos+1))-Li(1:num_elementos);
%%%                                INTEGRACIÓN
num_ptgauss=num_nodos_elem;
[pg,wg]=gauss_points(1,num_ptgauss);

[SF,DSF]=shapefunction(num_nodos_elem,num_ptgauss,pg);
[N,NN,NxN,NNx,NxNx]=x_int(wg,SF,DSF,CONEC,GLX,num_nodos_elem,num_elementos);

[F,Fy,Fz,wg_z,J_e]=thicknessfunction_L9(conec_secc,nodos_secc,3);
[ff,g_w,j_e]=thicknessfunction_L9_1(conec_secc,nodos_secc,3);

[ff2,G_W,j_ee]=thicknessfunction_L9_2(conec_secc,nodos_secc,3); % viento

[FF,FFy,FFz,FyF,FyFy,FyFz,FzF,FzFy,FzFz]=seccion_int(F,Fy,Fz,wg_z,J_e);

IF=seccion_intf(ff,g_w,j_e);
IF2=seccion_intf(ff2,g_w,j_ee); % viento

num_secc=length(conec_secc(:,1));
%%%                                INICIALIZANDO MATRICES
DOF=3*num_total_nodos*num_total_nodos_secc;

K=zeros(DOF);
M=zeros(DOF);
L=zeros(DOF);
T=zeros(DOF);
R1=zeros(DOF,1);
R2=zeros(DOF,1);
R3=zeros(DOF,1);
R4=zeros(DOF,1);
R5=zeros(DOF,1);
R6=zeros(DOF,1);
R7=zeros(DOF,1);
R8=zeros(DOF,1);
R=zeros(DOF,1);
U=zeros(DOF,1);

%%%                                CONDICIONES DE APOYO

```

```

bc=[(351*3+1):(378*3) (num_total_nodos-
1)*num_total_nodos_secc*3+(351*3+2:3:(378*3)) (num_total_nodos-
1)*num_total_nodos_secc*3+(351*3+3:3:(378*3))];
activeDOF=1:DOF;
activeDOF(bc)=[];
%%
%bc2=[180:185 190:195 200:205 208:297 298:300 304:309 313:318 322:324];

%% =====
%
%                               PROCESSESOR UNIT (1)
%=====
for e=1:num_elementos
for ee=1:num_secc

for i=1:num_nodos_elem
for j=1:num_nodos_elem

for t=1:9
for s=1:9

    indicei=(1:3)+3*(conec_secc(ee,t)-1)+3*(num_total_nodos_secc)*(CONEC(e,i)-1);
    indicej=(1:3)+3*(conec_secc(ee,s)-1)+3*(num_total_nodos_secc)*(CONEC(e,j)-1);

k=nucleo(C11,C12,C13,C22,C23,C33,C44,C55,C66,NN(i,j,e),NxN(i,j,e),NNx(i,j,e),NxNx
(i,j,e),...

FF(t,s,ee),FFy(t,s,ee),FFz(t,s,ee),FyF(t,s,ee),FyFy(t,s,ee),FyFz(t,s,ee),FzF(t,s,
ee),...
    FzFy(t,s,ee),FzFz(t,s,ee));

    K(indicei,indicej)=K(indicei,indicej)+k;
end
end

end
end

end
end

%=====
%
%                               PROCESSESOR UNIT (2)
%=====

for e=1:num_elementos
for ee=37:1:54
for i=1:num_nodos_elem
for j=1:num_nodos_elem

for t=1:9
for s=1:9

    indicei=(1:3)+3*(conec_secc(ee,t)-1)+3*(num_total_nodos_secc)*(CONEC(e,i)-1);
    indicej=(1:3)+3*(conec_secc(ee,s)-1)+3*(num_total_nodos_secc)*(CONEC(e,j)-1);

k2=nucleo(C11,C12,C13,C22,C23,C33,C44,C55,C66,NN(i,j,e),NxN(i,j,e),NNx(i,j,e),NxNx
x(i,j,e),...

FF(t,s,ee),FFy(t,s,ee),FFz(t,s,ee),FyF(t,s,ee),FyFy(t,s,ee),FyFz(t,s,ee),FzF(t,s,
ee),...

```

```

        FzFy(t,s,ee),FzFz(t,s,ee));

L(indicei,indicej)=L(indicei,indicej)+k2;
end
end

end
end

end
end

%=====
%
%                               PROCESSESOR UNIT (3)
%=====
for e=1:num_elementos
for ee=37:1:54
for i=1:num_nodos_elem
for j=1:num_nodos_elem

for t=1:9
for s=1:9

        indicei=(1:3)+3*(conec_secc(ee,t)-1)+3*(num_total_nodos_secc)*(CONEC(e,i)-1);
        indicej=(1:3)+3*(conec_secc(ee,s)-1)+3*(num_total_nodos_secc)*(CONEC(e,j)-1);

k2=nucleo(C11a,C12a,C13a,C22a,C23a,C33a,C44a,C55a,C66a,NN(i,j,e),NxN(i,j,e),NNx(i
,j,e),NxNx(i,j,e),...

FF(t,s,ee),FFy(t,s,ee),FFz(t,s,ee),FyF(t,s,ee),FyFy(t,s,ee),FyFz(t,s,ee),FzF(t,s,
ee),...
        FzFy(t,s,ee),FzFz(t,s,ee));

        M(indicei,indicej)=M(indicei,indicej)+k2;
end
end

end
end

end
end
PO=L*-1;
T=K+PO+M;
%=====
%
%                               CARGA DISTRIBUIDA (PRESION)
%=====
for e=1:num_elementos
for ee=1:24 % Número de secciones que está sometido a la carga
for i=1:num_nodos_elem
for t=1:9
        indicei=(3)+3*(conec_secc(ee,t)-1)+3*(num_total_nodos_secc)*(CONEC(e,i)-1);
        f1=P1*N(i,e)*IF(t,ee);
        R1(indicei)=R1(indicei)+f1;
end
end
end
end

for e=1:num_elementos

```

```

for ee=1:24 % Número de secciones que está sometido a la carga
for i=1:num_nodos_elem
for t=1:9
    indicei=(3)+3*(conec_secc(ee,t)-1)+3*(num_total_nodos_secc)*(CONEC(e,i)-1);
    f2=P2*N(i,e)*IF(t,ee);
    R2(indicei)=R2(indicei)+f2;
end
end
end
end
%=====
%
%                               CARGA DISTRIBUIDA (VIENTO)
%=====
for e=1:num_elementos
for i=1:num_nodos_elem
for t=1:9
    ee=24;
    indicei=(2)+3*(conec_secc(ee,t)-1)+3*(num_total_nodos_secc)*(CONEC(e,i)-1);
    f1=Pv*N(i,e)*IF2(t,ee);
    R3(indicei)=R3(indicei)+f1;
end
end
end

for e=1:num_elementos
for i=1:num_nodos_elem
for t=1:9
    ee=36;
    indicei=(2)+3*(conec_secc(ee,t)-1)+3*(num_total_nodos_secc)*(CONEC(e,i)-1);
    f1=Pv*N(i,e)*IF2(t,ee);
    R4(indicei)=R4(indicei)+f1;
end
end
end

for e=1:num_elementos
for i=1:num_nodos_elem
for t=1:9
    ee=42;
    indicei=(2)+3*(conec_secc(ee,t)-1)+3*(num_total_nodos_secc)*(CONEC(e,i)-1);
    f1=Pv*N(i,e)*IF2(t,ee);
    R5(indicei)=R5(indicei)+f1;
end
end
end

for e=1:num_elementos
for i=1:num_nodos_elem
for t=1:9
    ee=48;
    indicei=(2)+3*(conec_secc(ee,t)-1)+3*(num_total_nodos_secc)*(CONEC(e,i)-1);
    f1=Pv*N(i,e)*IF2(t,ee);
    R6(indicei)=R6(indicei)+f1;
end
end
end

for e=1:num_elementos
for i=1:num_nodos_elem
for t=1:9

```

```

        ee=54;
        indicei=(2)+3*(conec_secc(ee,t)-1)+3*(num_total_nodos_secc)*(CONEC(e,i)-1);
        f1=Pv*N(i,e)*IF2(t,ee);
        R7(indicei)=R7(indicei)+f1;
end
end
end

for e=1:num_elementos
for i=1:num_nodos_elem
for t=1:9
    ee=66;
    indicei=(2)+3*(conec_secc(ee,t)-1)+3*(num_total_nodos_secc)*(CONEC(e,i)-1);
    f1=Pv*N(i,e)*IF2(t,ee);
    R8(indicei)=R8(indicei)+f1;
end
end
end

R=R1+R2+R3+R4+R5+R6+R7+R8;
%
% REESTABLECER TAMAÑO
T(bc,:)=[];
T(:,bc)=[];
R(bc)=[];

%%
% OBTENER VARIABLES DESCONOCIDAS
U(activeDOF)=T\R;

%=====
%
% GRAFICO DE LA ESTRUCTURA ORIGINAL Y DEFORMACION
%=====
Up=U((num_total_nodos-1)/2*num_total_nodos_secc*3+(1:(3*num_total_nodos_secc)));
u=Up(1:3:(3*num_total_nodos_secc));
v=Up(2:3:(3*num_total_nodos_secc));
w=Up(3:3:(3*num_total_nodos_secc));
escala=10^2;
figure(1),plot(nodos_secc(:,1)+v*escala,nodos_secc(:,2)+w*escala,'.blue')
xlabel ('Uy (mm) ')
ylabel ('Uz (mm) ')
hold on

% %=====
% %
% POST-PROCESSESOR UNIT
%=====
PARA PRIMER CUADRO*****
x=4; z=0.16027;
e_st1=24; e_st2=23; e_st3=21; e_st4=17; e_st5=16; e_st6=15; e_st7=13;
y1=1.005; y2=0.862; y3=0.74011; y4=0.478; y5=0.335; y6=0.192; y7=0.07011;

[Ui]=
ux(x,y1,z,Li,Ll,num_elementos,e_st1,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_tota
l_nodos_secc,U)
[V]=
uy(x,y1,z,Li,Ll,num_elementos,e_st1,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_tota
l_nodos_secc,U)
[W]=
uz(x,y1,z,Li,Ll,num_elementos,e_st1,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_tota
l_nodos_secc,U)

```

```

[Ui2]=
ux(x,y2,z,Li,Ll,num_elementos,e_st2,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_tota
l_nodos_secc,U)
[V2]=
uy(x,y2,z,Li,Ll,num_elementos,e_st2,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_tota
l_nodos_secc,U)
[W2]=
uz(x,y2,z,Li,Ll,num_elementos,e_st2,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_tota
l_nodos_secc,U)

[Ui3]=
ux(x,y3,z,Li,Ll,num_elementos,e_st3,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_tota
l_nodos_secc,U)
[V3]=
uy(x,y3,z,Li,Ll,num_elementos,e_st3,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_tota
l_nodos_secc,U)
[W3]=
uz(x,y3,z,Li,Ll,num_elementos,e_st3,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_tota
l_nodos_secc,U)

[Ui4]=
ux(x,y4,z,Li,Ll,num_elementos,e_st4,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_tota
l_nodos_secc,U)
[V4]=
uy(x,y4,z,Li,Ll,num_elementos,e_st4,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_tota
l_nodos_secc,U)
[W4]=
uz(x,y4,z,Li,Ll,num_elementos,e_st4,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_tota
l_nodos_secc,U)

[Ui5]=
ux(x,y5,z,Li,Ll,num_elementos,e_st5,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_tota
l_nodos_secc,U)
[V5]=
uy(x,y5,z,Li,Ll,num_elementos,e_st5,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_tota
l_nodos_secc,U)
[W5]=
uz(x,y5,z,Li,Ll,num_elementos,e_st5,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_tota
l_nodos_secc,U)

[Ui26]=
ux(x,y6,z,Li,Ll,num_elementos,e_st6,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_tota
l_nodos_secc,U)
[V6]=
uy(x,y6,z,Li,Ll,num_elementos,e_st6,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_tota
l_nodos_secc,U)
[W6]=
uz(x,y6,z,Li,Ll,num_elementos,e_st6,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_tota
l_nodos_secc,U)

[Ui7]=
ux(x,y7,z,Li,Ll,num_elementos,e_st7,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_tota
l_nodos_secc,U)
[V7]=
uy(x,y7,z,Li,Ll,num_elementos,e_st7,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_tota
l_nodos_secc,U)
[W7]=
uz(x,y7,z,Li,Ll,num_elementos,e_st7,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_tota
l_nodos_secc,U)
% %=====
% % SEGUNDO GRAFICO DESPLAZAMIENTO EN Uz 0.110 a 0.150
% %=====

```

```

xo=4;
yo=1.005;
zz=0.12049:0.001:0.16027;
secc=24;

ZZZ=zeros(length(zz),1);
for i=1:length(zz)
ZZ=0;
for z1=zz(i);

ZZ=ZZ+uz(xo,yo,z1,Li,Ll,num_elementos,secc,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_total_nodos_secc,U);
end
ZZZ(i)=ZZ;
end

ppp=[ZZZ];
pp=[zz]';
figure(2),plot(ppp,pp)
legend('z')
% % %=====
% % % TERCER CUADRO *****
% % %=====
xa=4; za=0.14038; e_sta=22; ya=0.83011;
xb=4; zb=0.1006; e_stb=35; yb=0.83011;
xc=4; zc=0.040355; e_stc=42; yc=0.83011;
xd=4; zd=-0.029878; e_std=48; yd=0.83011;
xe=4; ze=-0.089634; e_ste=54; ye=0.83011;
xf=4; zf=-0.154651; e_stf=66; yf=0.83011;

[Uia]=
ux(xa,ya,za,Li,Ll,num_elementos,e_sta,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_total_nodos_secc,U)
[Va]=
uy(xa,ya,za,Li,Ll,num_elementos,e_sta,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_total_nodos_secc,U)
[Wa]=
uz(xa,ya,za,Li,Ll,num_elementos,e_sta,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_total_nodos_secc,U)

[Uib]=
ux(xb,yb,zb,Li,Ll,num_elementos,e_stb,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_total_nodos_secc,U)
[Vb]=
uy(xb,yb,zb,Li,Ll,num_elementos,e_stb,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_total_nodos_secc,U)
[Wb]=
uz(xb,yb,zb,Li,Ll,num_elementos,e_stb,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_total_nodos_secc,U)

[Uic]=
ux(xc,yc,zc,Li,Ll,num_elementos,e_stc,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_total_nodos_secc,U)
[Vc]=
uy(xc,yc,zc,Li,Ll,num_elementos,e_stc,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_total_nodos_secc,U)
[Wc]=
uz(xc,yc,zc,Li,Ll,num_elementos,e_stc,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_total_nodos_secc,U)

[Uid]=
ux(xd,yd,zd,Li,Ll,num_elementos,e_std,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_total_nodos_secc,U)

```

```

[Vd]=
uy(xd,yd,zd,Li,Ll,num_elementos,e_std,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_to
tal_nodos_secc,U)
[Wd]=
uz(xd,yd,zd,Li,Ll,num_elementos,e_std,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_to
tal_nodos_secc,U)

[Uie]=
ux(xe,ye,ze,Li,Ll,num_elementos,e_ste,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_to
tal_nodos_secc,U)
[Ve]=
uy(xe,ye,ze,Li,Ll,num_elementos,e_ste,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_to
tal_nodos_secc,U)
[We]=
uz(xe,ye,ze,Li,Ll,num_elementos,e_ste,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_to
tal_nodos_secc,U)

[Uif]=
ux(xf,yf,zf,Li,Ll,num_elementos,e_stf,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_to
tal_nodos_secc,U)
[Vf]=
uy(xf,yf,zf,Li,Ll,num_elementos,e_stf,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_to
tal_nodos_secc,U)
[Wf]=
uz(xf,yf,zf,Li,Ll,num_elementos,e_stf,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_to
tal_nodos_secc,U)
%
% %

%=====
% % %CUARTO   GRAFICO
%=====
xp=4; yp=0.830; yy1= 0.12049:0.007956:0.16027 ; secc1=22;
yy2=0.08071:0.007956:0.12049 ; secc2=35;
yy3=0:0.007956:0.08071 ; secc3=42;
yy4=-0.089634:0.007956:0 ; secc4=48;
yy5= -0.119512:0.007956:-0.089634 ; secc5=54;
yy6= -0.18979:0.007956:-0.119512; secc6=66;

YYY=zeros(length(yy1),1);
for i=1:length(yy1)
YY=0;
for z1=yy1(i);

YY=YY+uy(xp,yp,z1,Li,Ll,num_elementos,secc1,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,
num_total_nodos_secc,U);
end
YYY(i)=YY;
end

YYY2=zeros(length(yy2),1);
for i=1:length(yy2)
YY=0;
for z1=yy2(i);

YY=YY+uy(xp,yp,z1,Li,Ll,num_elementos,secc2,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,
num_total_nodos_secc,U);
end
YYY2(i)=YY;
end

YYY3=zeros(length(yy3),1);
for i=1:length(yy3)

```

```

YY=0;
for z1=yy3(i);

YY=YY+uy(xp,yp,z1,Li,Ll,num_elementos,secc3,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,
num_total_nodos_secc,U);
end
YYY3(i)=YY;
end

YYY4=zeros(length(yy4),1);
for i=1:length(yy4)
YY=0;
for z1=yy4(i);

YY=YY+uy(xp,yp,z1,Li,Ll,num_elementos,secc4,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,
num_total_nodos_secc,U);
end
YYY4(i)=YY;
end

YYY5=zeros(length(yy5),1);
for i=1:length(yy5)
YY=0;
for z1=yy5(i);

YY=YY+uy(xp,yp,z1,Li,Ll,num_elementos,secc5,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,
num_total_nodos_secc,U);
end
YYY5(i)=YY;
end

YYY6=zeros(length(yy6),1);
for i=1:length(yy6)
YY=0;
for z1=yy6(i);

YY=YY+uy(xp,yp,z1,Li,Ll,num_elementos,secc6,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,
num_total_nodos_secc,U);
end
YYY6(i)=YY;
end

ppy=[YYY6;YYY5;YYY4;YYY3;YYY2;YYY];
py=[yy6 yy5 yy4 yy3 yy2 yy1]';
figure(3),plot(ppy,py)
legend('y')

% % %=====
% % % QUINTO % CUADRO
% % %=====

xi=6; zi=0.130;          e_sti=4;      yi=-0.740;
      zii=0.130;        e_stii=17;     yii=0.478;
      ziii=-0.1125;    e_stiii=50;    yiii=-0.510;
      ziiii=-0.154;    e_stiiii=62;   yiiii=0.16011;

[Uii]=
ux(xi,yi,zi,Li,Ll,num_elementos,e_sti,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_to
tal_nodos_secc,U)
[Vi]=
uy(xi,yi,zi,Li,Ll,num_elementos,e_sti,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_to
tal_nodos_secc,U)

```

```

[Wi]=
uz(xi,yi,zi,Li,Ll,num_elementos,e_sti,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_to
tal_nodos_secc,U)

[Uiii]=
ux(xi,yii,zii,Li,Ll,num_elementos,e_stii,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num
_total_nodos_secc,U)
[Vii]=
uy(xi,yii,zii,Li,Ll,num_elementos,e_stii,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num
_total_nodos_secc,U)
[Wii]=
uz(xi,yii,zii,Li,Ll,num_elementos,e_stii,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num
_total_nodos_secc,U)

[Uiiii]=
ux(xi,yiii,ziii,Li,Ll,num_elementos,e_stiii,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,
num_total_nodos_secc,U)
[Viii]=
uy(xi,yiii,ziii,Li,Ll,num_elementos,e_stiii,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,
num_total_nodos_secc,U)
[Wiii]=
uz(xi,yiii,ziii,Li,Ll,num_elementos,e_stiii,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,
num_total_nodos_secc,U)

[Uiiiiii]=
ux(xi,yiiii,ziiii,Li,Ll,num_elementos,e_stiiii,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_se
cc,num_total_nodos_secc,U)
[Viiii]=
uy(xi,yiiii,ziiii,Li,Ll,num_elementos,e_stiiii,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_se
cc,num_total_nodos_secc,U)
[Wiiii]=
uz(xi,yiiii,ziiii,Li,Ll,num_elementos,e_stiiii,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_se
cc,num_total_nodos_secc,U)

```

```

%=====
% % %                               SEXTO GRAFICO
%=====

```

```

xj=6; yj=-0.510; zz1=0.12049:0.007956:0.16027           ; secc1z=6;
                zz2=0.08071:0.007956:0.12049           ; secc2z=27;
                zz3=0:0.007956:0.08071                 ; secc3z=38;
                zz4=-0.089634:0.007956:0               ; secc4z=44;
                zz5=-0.119512:0.007956:-0.089634       ; secc5z=50;
                zz6=-0.18979:0.007956:-0.119512        ; secc6z=58;

ZZZ=zeros(length(zz1),1);
for i=1:length(zz1)
YY=0;
for z1=zz1(i);

YY=YY+ux(xj,yj,z1,Li,Ll,num_elementos,secc1z,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc
,num_total_nodos_secc,U);
end
ZZZ(i)=YY;
end

ZZZ2=zeros(length(zz2),1);
for i=1:length(zz2)
YY=0;
for z1=zz2(i);

YY=YY+ux(xj,yj,z1,Li,Ll,num_elementos,secc2z,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc
,num_total_nodos_secc,U);

```

```

end
ZZZ2(i)=YY;
end

ZZZ3=zeros(length(zz3),1);
for i=1:length(zz3)
YY=0;
for z1=zz3(i);

YY=YY+ux(xj,yj,z1,Li,Ll,num_elementos,secc3z,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc
,num_total_nodos_secc,U);
end
ZZZ3(i)=YY;
end

ZZZ4=zeros(length(zz4),1);
for i=1:length(zz4)
YY=0;
for z1=zz4(i);

YY=YY+ux(xj,yj,z1,Li,Ll,num_elementos,secc4z,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc
,num_total_nodos_secc,U);
end
ZZZ4(i)=YY;
end

ZZZ5=zeros(length(zz5),1);
for i=1:length(zz5)
YY=0;
for z1=zz5(i);

YY=YY+ux(xj,yj,z1,Li,Ll,num_elementos,secc5z,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc
,num_total_nodos_secc,U);
end
ZZZ5(i)=YY;
end

ZZZ6=zeros(length(zz6),1);
for i=1:length(zz6)
YY=0;
for z1=zz6(i);

YY=YY+ux(xj,yj,z1,Li,Ll,num_elementos,secc6z,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc
,num_total_nodos_secc,U);
end
ZZZ6(i)=YY;
end

ZZx=[ZZZ6;ZZZ5;ZZZ4;ZZZ3;ZZZ2;ZZZ];
Zx=[zz6 zz5 zz4 zz3 zz2 zz1]';
figure(4),plot(ZZx,Zx)
legend('x')
%
% %=====
% % %
% % % SEPTIMO ***CUADRO
% % %
%=====

xm=2; zm=0.14038; e_stm=8; ym=-0.4065;
z2m=0.035; e_st2m=39; y2m=-0.160;

```

```

        z3m=-0.029;      e_st3m=47;      y3m=0.50989;
        z4m=-0.154;      e_st4m=66;      y4m=0.83011;

[Uim]=
ux(xm,ym,zm,Li,Ll,num_elementos,e_stm,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_to
tal_nodos_secc,U)
[Vm]=
uy(xm,ym,zm,Li,Ll,num_elementos,e_stm,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_to
tal_nodos_secc,U)
[Wm]=
uz(xm,ym,zm,Li,Ll,num_elementos,e_stm,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_to
tal_nodos_secc,U)

[Ui2m]=
ux(xm,y2m,z2m,Li,Ll,num_elementos,e_st2m,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num
_total_nodos_secc,U)
[V2m]=
uy(xm,y2m,z2m,Li,Ll,num_elementos,e_st2m,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num
_total_nodos_secc,U)
[W2m]=
uz(xm,y2m,z2m,Li,Ll,num_elementos,e_st2m,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num
_total_nodos_secc,U)

[Ui3m]=
ux(xm,y3m,z3m,Li,Ll,num_elementos,e_st3m,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num
_total_nodos_secc,U)
[V3m]=
uy(xm,y3m,z3m,Li,Ll,num_elementos,e_st3m,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num
_total_nodos_secc,U)
[W3m]=
uz(xm,y3m,z3m,Li,Ll,num_elementos,e_st3m,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num
_total_nodos_secc,U)

[Ui4m]=
ux(xm,y4m,z4m,Li,Ll,num_elementos,e_st4m,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num
_total_nodos_secc,U)
[V4m]=
uy(xm,y4m,z4m,Li,Ll,num_elementos,e_st4m,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num
_total_nodos_secc,U)
[W4m]=
uz(xm,y4m,z4m,Li,Ll,num_elementos,e_st4m,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num
_total_nodos_secc,U)

%=====
%                               % %OCTAVO ** GRAFICO
%=====

xw=2; yw=-0.160;ww1=0.12049:0.007956:0.16027    ; secc1w=11;
        ww2=0.08071:0.007956:0.12049    ; secc2w=30;
        ww3= 0:0.007956:0.08071        ; secc3w=39;
        ww4=-0.089634:0.007956:0        ; secc4w=45;
        ww5=-0.119512:0.007956:-0.089634; secc5w=51;
        ww6=-0.18979:0.007956:-0.119512; secc6w=59;

WWW=zeros(length(ww1),1);
for i=1:length(ww1)
YY=0;
for z1=ww1(i);

YY=YY+uy(xw,yw,z1,Li,Ll,num_elementos,secc1w,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc
,num_total_nodos_secc,U);
end

```

```

WWW(i)=YY;
end

WWW2=zeros(length(ww2),1);
for i=1:length(ww2)
YY=0;
for z1=ww2(i);

YY=YY+uy(xw,yw,z1,Li,Ll,num_elementos,secc2w,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc
,num_total_nodos_secc,U);
end
WWW2(i)=YY;
end

WWW3=zeros(length(ww3),1);
for i=1:length(ww3)
YY=0;
for z1=ww3(i);

YY=YY+uy(xw,yw,z1,Li,Ll,num_elementos,secc3w,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc
,num_total_nodos_secc,U);
end
WWW3(i)=YY;
end

WWW4=zeros(length(ww4),1);
for i=1:length(ww4)
YY=0;
for z1=ww4(i);

YY=YY+uy(xw,yw,z1,Li,Ll,num_elementos,secc4w,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc
,num_total_nodos_secc,U);
end
WWW4(i)=YY;
end

WWW5=zeros(length(ww5),1);
for i=1:length(ww5)
YY=0;
for z1=ww5(i);

YY=YY+uy(xw,yw,z1,Li,Ll,num_elementos,secc5w,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc
,num_total_nodos_secc,U);
end
WWW5(i)=YY;
end

WWW6=zeros(length(ww6),1);
for i=1:length(ww6)
YY=0;
for z1=ww6(i);

YY=YY+uy(xw,yw,z1,Li,Ll,num_elementos,secc6w,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc
,num_total_nodos_secc,U);
end
WWW6(i)=YY;
end

WWY=[WWW6;WWW5;WWW4;WWW3;WWW2;WWW];
Wy=[ww6 ww5 ww4 ww3 ww2 ww1]';
figure(5),plot(WWY,Wy)
legend('y')

```

```

% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% % CON VIENTO
% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
xv=2;    yv= 1.005;    zv= 0.16027;    e_stv=24;
x2v=4;    y2v= 1.005;    z2v=0.16027;    e_st2v=24;
x3v=4;    y3v= 0.850;    z3v=-0.119512;    e_st3v=54;
x4v=6;    y4v= 0.850;    z4v=-0.18979;    e_st4v=66;

[Uiv]=
ux(xv, yv, zv, Li, Ll, num_elementos, e_stv, num_nodos_elem, conec_secc, nodos_secc, num_to
tal_nodos_secc, U)
[Vv]=
uy(xv, yv, zv, Li, Ll, num_elementos, e_stv, num_nodos_elem, conec_secc, nodos_secc, num_to
tal_nodos_secc, U)
[Wv]=
uz(xv, yv, zv, Li, Ll, num_elementos, e_stv, num_nodos_elem, conec_secc, nodos_secc, num_to
tal_nodos_secc, U)
[Ui2v]=
ux(x2v, y2v, z2v, Li, Ll, num_elementos, e_st2v, num_nodos_elem, conec_secc, nodos_secc, nu
m_total_nodos_secc, U)
[V2v]=
uy(x2v, y2v, z2v, Li, Ll, num_elementos, e_st2v, num_nodos_elem, conec_secc, nodos_secc, nu
m_total_nodos_secc, U)
[W2v]=
uz(x2v, y2v, z2v, Li, Ll, num_elementos, e_st2v, num_nodos_elem, conec_secc, nodos_secc, nu
m_total_nodos_secc, U)
[Ui3v]=
ux(x3v, y3v, z3v, Li, Ll, num_elementos, e_st3v, num_nodos_elem, conec_secc, nodos_secc, nu
m_total_nodos_secc, U)
[V3v]=
uy(x3v, y3v, z3v, Li, Ll, num_elementos, e_st3v, num_nodos_elem, conec_secc, nodos_secc, nu
m_total_nodos_secc, U)
[W3v]=
uz(x3v, y3v, z3v, Li, Ll, num_elementos, e_st3v, num_nodos_elem, conec_secc, nodos_secc, nu
m_total_nodos_secc, U)
[Ui4v]=
ux(x4v, y4v, z4v, Li, Ll, num_elementos, e_st4v, num_nodos_elem, conec_secc, nodos_secc, nu
m_total_nodos_secc, U)
[V4v]=
uy(x4v, y4v, z4v, Li, Ll, num_elementos, e_st4v, num_nodos_elem, conec_secc, nodos_secc, nu
m_total_nodos_secc, U)
[W4v]=
uz(x4v, y4v, z4v, Li, Ll, num_elementos, e_st4v, num_nodos_elem, conec_secc, nodos_secc, nu
m_total_nodos_secc, U)
%
%
% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% % GRAFICO DE UY CON VIENTO
% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
xw=4; yw=0.830; ww1=0.12049:0.007956:0.16027 ; secc1w=22;
ww2=0.08071:0.007956:0.12049 ; secc2w=35;
ww3=0:0.007956:0.08071 ; secc3w=42;
ww4=-0.089634:0.007956:0 ; secc4w=48;
ww5=-0.119512:0.007956:-0.089634; secc5w=54;
ww6=-0.18979:0.007956:-0.119512; secc6w=66;

WWW=zeros(length(ww1), 1);
for i=1:length(ww1)
YY=0;
for z1=ww1(i);

YY=YY+uy(xw, yw, z1, Li, Ll, num_elementos, secc1w, num_nodos_elem, conec_secc, nodos_secc
, num_total_nodos_secc, U);

```

```

end
WWW(i)=YY;
end

WWW2=zeros(length(ww2),1);
for i=1:length(ww2)
YY=0;
for z1=ww2(i);

YY=YY+uy(xw,yw,z1,Li,Ll,num_elementos,secc2w,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc
,num_total_nodos_secc,U);
end
WWW2(i)=YY;
end

WWW3=zeros(length(ww3),1);
for i=1:length(ww3)
YY=0;
for z1=ww3(i);

YY=YY+uy(xw,yw,z1,Li,Ll,num_elementos,secc3w,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc
,num_total_nodos_secc,U);
end
WWW3(i)=YY;
end

WWW4=zeros(length(ww4),1);
for i=1:length(ww4)
YY=0;
for z1=ww4(i);

YY=YY+uy(xw,yw,z1,Li,Ll,num_elementos,secc4w,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc
,num_total_nodos_secc,U);
end
WWW4(i)=YY;
end

WWW5=zeros(length(ww5),1);
for i=1:length(ww5)
YY=0;
for z1=ww5(i);

YY=YY+uy(xw,yw,z1,Li,Ll,num_elementos,secc5w,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc
,num_total_nodos_secc,U);
end
WWW5(i)=YY;
end

WWW6=zeros(length(ww6),1);
for i=1:length(ww6)
YY=0;
for z1=ww6(i);

YY=YY+uy(xw,yw,z1,Li,Ll,num_elementos,secc6w,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc
,num_total_nodos_secc,U);
end
WWW6(i)=YY;
end

WWy=[WWW6;WWW5;WWW4;WWW3;WWW2;WWW];
Wy=[ww6 ww5 ww4 ww3 ww2 ww1]';
figure(5),plot(WWy,Wy)

```

```

legend('y')
%=====
% ESFUERZO EN XX
%=====

e_stS=24;xS=4;yS=1.005;zS=0.130;

Sxx=
C12*uy_y(xS,yS,zS,Li,Ll,num_elementos,e_stS,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,
num_total_nodos_secc,U)+...

C13*uz_z(xS,yS,zS,Li,Ll,num_elementos,e_stS,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,
num_total_nodos_secc,U)+...

C11*ux_x(xS,yS,zS,Li,Ll,num_elementos,e_stS,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,
num_total_nodos_secc,U)

```

## Anexo 7 Mesh1d

```
function
[CONEC, GLX]=mesh1d(num_nodos_elem,num_total_nodos,num_elementos,L)
CONEC= repmat(1:num_nodos_elem,[num_elementos,1])...
        + repmat((0:num_elementos-1)'*(num_nodos_elem-
1),[1,num_nodos_elem]);
GLX=linspace(0,L,num_total_nodos)';% Ubicación de los nodos a lo largo
del eje X
end
```

## Anexo 8 Gauss\_points

```
function [ G_P, G_W ] = gauss_points( dim, num_points)
fid = fopen('gauss_points.txt', 'rb');
res={};
while ~feof(fid)
    res{end+1,1} =fgetl(fid);
end
numLines=numel(res);
fclose(fid);
if dim==1
    fid = fopen('gauss_points.txt','r');
    for i=1:numLines
        tag = fgetl(fid);
        if strcmp(tag,['n=' num2str(num_points)],4)
            gauss_data = zeros(num_points,3);
            for j=1:num_points
                gauss_data(j,1:3) = fscanf(fid,['%f' '\t' '%f' '\t'
'%f'],3);
            end
            break
        end
    end
    fclose(fid);
    gauss_data(:,1) = [];
    G_W = gauss_data(:,1);
    G_P = gauss_data(:,2);
elseif dim==2
    fid = fopen('gauss_points.txt','r');
    for i=1:numLines
        tag = fgetl(fid);
        if strcmp(tag,['n=' num2str(num_points)],4)
            gauss_data = zeros(num_points,3);
            for j=1:num_points
                gauss_data(j,1:3) = fscanf(fid,['%f' '\t' '%f' '\t'
'%f'],3);
            end
            break
        end
    end
    fclose(fid);
    gauss_data(:,1) = [];
    G_W_var = gauss_data(:,1);
    G_P_var = gauss_data(:,2);
    G_P = zeros(num_points^2,2);
    G_W = zeros(num_points^2,1);
    for m = 1:num_points
        for n = 1:num_points
            G_P(m + (n-1)*num_points,:) = [G_P_var(m) G_P_var(n)];
            G_W(m + (n-1)*num_points) = G_W_var(m)*G_W_var(n);
        end
    end
end
end
```

## Anexo 9 Shapefunction

```
function [SF,DSF]=shapefunction(num_nodos_elem,num_ptgauss,pg)

XNODE=linspace(-1,1,num_nodos_elem);
% Compute the Lagrangian Functions
SF=zeros(num_nodos_elem,num_ptgauss);DSF=SF;
for pt=1:num_ptgauss
    XI = pg(pt);
    for I=1:num_nodos_elem
        xnode=XNODE;xnode(I)=[];
        SF(I,pt)=prod(XI-xnode)/prod(XNODE(I)-xnode);
        for J=1:num_nodos_elem
            if J~=I
                xnode2=XNODE;xnode2([I J])=[];
                DSF(I,pt)=DSF(I,pt)+prod(XI-xnode2)/prod(XNODE(I)-xnode);
            end
        end
    end
end
end
end
```

## Anexo 10 x\_int

```
function [N,NN,NxN,NNx,NxNx]=x_int(wg,SF,DSF,CONEC,GLX,nn,ne)
N=zeros(nn,ne);
NN=zeros(nn,nn,ne);
NxN=zeros(nn,nn,ne);
NNx=zeros(nn,nn,ne);
NxNx=zeros(nn,nn,ne);
for e=1:ne
    ELX=GLX(CONEC(e,:));

    H=ELX(nn)-ELX(1);
    GDSF=DSF/(0.5*H);

    CNST=0.5*H*wg;

    NxN(:,:,e)=sum(repmat(permute(GDSF,[1,3,2]),[1,nn]).*...
repmat(permute(SF,[3,1,2]),[nn,1]).*repmat(permute(CNST,[3,2,1]),[nn,nn,1
]),3);
    NNx(:,:,e)=NxN(:,:,e)';
    NxNx(:,:,e)=sum(repmat(permute(GDSF,[1,3,2]),[1,nn]).*...
repmat(permute(GDSF,[3,1,2]),[nn,1]).*repmat(permute(CNST,[3,2,1]),[nn,nn
,1]),3);
    NN(:,:,e)=sum(repmat(permute(SF,[1,3,2]),[1,nn]).*...
repmat(permute(SF,[3,1,2]),[nn,1]).*repmat(permute(CNST,[3,2,1]),[nn,nn,1
]),3);
    N(:,e)=sum(SF.*repmat(permute(CNST,[2,1]),[nn,1]),2);
end
end
```

## Anexo 11 thicknessfunction\_L9

```

function
[F,Fy,Fz,wg_z,j_e]=thicknessfunction_L9(conec_secc,nodos_secc,num_ptg)
[G_P,wg_z] = gauss_points( 2, num_ptg);
r=G_P(:,1)';s=G_P(:,2)';
F=[0.25*(r.^2-r).*(s.^2-s);
  0.5*(s.^2-s).*(1-r.^2);
  0.25*(r.^2+r).*(s.^2-s);
  0.5*(r.^2+r).*(1-s.^2);
  0.25*(r.^2+r).*(s.^2+s);
  0.5*(s.^2+s).*(1-r.^2);
  0.25*(r.^2-r).*(s.^2+s);
  0.5*(r.^2-r).*(1-s.^2);
  (1-r.^2).*(1-s.^2)];
Fr=[-(- s.^2 + s).*(r/2 - 1/4);
  2*r.*(- s.^2/2 + s/2);
  -(- s.^2 + s).*(r/2 + 1/4);
  -(s.^2 - 1).*(r + 1/2);
  (r/2 + 1/4).*(s.^2 + s);
  -2*r.*(s.^2/2 + s/2);
  (r/2 - 1/4).*(s.^2 + s);
  -(s.^2 - 1).*(r - 1/2);
  2*r.*(s.^2 - 1)];
Fs=[-(2*s - 1).*(- r.^2/4 + r/4);
  -(r.^2 - 1).*(s - 1/2);
  (2*s - 1).*(r.^2/4 + r/4);
  -2*s.*(r.^2/2 + r/2);
  (2*s + 1).*(r.^2/4 + r/4);
  -(r.^2 - 1).*(s + 1/2);
  -(2*s + 1).*(- r.^2/4 + r/4);
  2*s.*(- r.^2/2 + r/2);
  2*s.*(r.^2 - 1)];

num_sec=length(conec_secc(:,1));
Fy=zeros(9,9,num_sec);
Fz=Fy;
j_e=zeros(num_sec,1);
for e=1:num_sec
  a=(nodos_secc(conec_secc(e,3),1)-nodos_secc(conec_secc(e,1),1))/2;
  Fy(:, :, e)=Fr/a;
  b=(nodos_secc(conec_secc(e,7),2)-nodos_secc(conec_secc(e,1),2))/2;
  Fz(:, :, e)=Fs/b;
  j_e(e)=a*b;
end

end

```

## Anexo 12 thicknessfunction\_L9\_1

```
function
[ff,g_w,j_e]=thicknessfunction_L9_1(conec_secc,nodos_secc,num_ptg)
[G_P,g_w] = gauss_points( 1, num_ptg);
r=G_P';s=ones(1,num_ptg); %%% Para la ubicacion de la fuerza
ff=[0.25*(r.^2-r).*(s.^2-s);
    0.5*(s.^2-s).*(1-r.^2);
    0.25*(r.^2+r).*(s.^2-s);
    0.5*(r.^2+r).*(1-s.^2);
    0.25*(r.^2+r).*(s.^2+s);
    0.5*(s.^2+s).*(1-r.^2);
    0.25*(r.^2-r).*(s.^2+s);
    0.5*(r.^2-r).*(1-s.^2);
    (1-r.^2).*(1-s.^2)];
num_sec=length(conec_secc(:,1));
j_e=zeros(num_sec,1);
for e=1:num_sec
    j_e(e)=(nodos_secc(conec_secc(e,3),1)-
nodos_secc(conec_secc(e,1),1))/2;
end
end
```

## Anexo 13 thicknessfunction\_L9\_2

```
function [ff2,g_w,j_ee]=thicknessfunction_L9_2(conec_secc,nodos_secc,num_ptg)
[G_P,g_w] = gauss_points( 1, num_ptg);
r=ones(1,num_ptg);s=G_P'; %%% Para la ubicacion de la fuerza
ff2=[0.25*(r.^2-r).*(s.^2-s);
      0.5*(s.^2-s).*(1-r.^2);
      0.25*(r.^2+r).*(s.^2-s);
      0.5*(r.^2+r).*(1-s.^2);
      0.25*(r.^2+r).*(s.^2+s);
      0.5*(s.^2+s).*(1-r.^2);
      0.25*(r.^2-r).*(s.^2+s);
      0.5*(r.^2-r).*(1-s.^2);
      (1-r.^2).*(1-s.^2)];
num_sec=length(conec_secc(:,1));
j_ee=zeros(num_sec,1);
for e=1:num_sec
    j_ee(e)=(nodos_secc(conec_secc(e,7),2)-nodos_secc(conec_secc(e,1),2))/2;
end
end
```

## Anexo 14 sección\_int

```
function [FF,FFy,FFz,FyF,FyFy,FyFz,FzF,FzFy,FzFz]=seccion_int(F,Fy,Fz,wg_z,j_e)
ne=length(Fy(1,1,:));
FF=zeros(9,9,ne);FFy=FF;FFz=FF;FyF=FF;FyFy=FF;FyFz=FF;FzF=FF;FzFy=FF;FzFz=FF;

Fi=repmat(permute(F,[1,3,2]),[1,9]);
Fj=repmat(permute(F,[3,1,2]),[9,1]);

for e=1:ne
    Fiy=repmat(permute(Fy(:,:,e),[1,3,2]),[1,9]);
    Fiz=repmat(permute(Fz(:,:,e),[1,3,2]),[1,9]);
    Fjy=repmat(permute(Fy(:,:,e),[3,1,2]),[9,1]);
    Fjz=repmat(permute(Fz(:,:,e),[3,1,2]),[9,1]);
    CNST=repmat(permute(j_e(e)*wg_z,[3,2,1]),[9,9,1]);

    FF(:,:,e)=sum(Fi.*Fj.*CNST,3);
    FFy(:,:,e)=sum(Fi.*Fjy.*CNST,3);
    FyF(:,:,e)=sum(Fiy.*Fj.*CNST,3);    %%YLP
    FFz(:,:,e)=sum(Fi.*Fjz.*CNST,3);
    FzF(:,:,e)=sum(Fiz.*Fj.*CNST,3);    %%
    FyFy(:,:,e)=sum(Fiy.*Fjy.*CNST,3);
    FyFz(:,:,e)=sum(Fiy.*Fjz.*CNST,3);
    FzFy(:,:,e)=sum(Fiz.*Fjy.*CNST,3);
    FzFz(:,:,e)=sum(Fiz.*Fjz.*CNST,3);

end
end
```

## Anexo 15 sección\_intf

```
function IF=seccion_intf(ff,g_w,j_e)
ne=length(j_e);
IF=zeros(9,ne);
for e=1:ne
    CNST= repmat(permute(j_e(e)*g_w,[2,1]),[9,1]);
    IF(:,e)=sum(ff.*CNST,2);
end
end
```

## Anexo 16 nucleo

```
function K=nucleo(C11,C12,C13,C22,C23,C33,C44,C55,C66,NN,NxN,NNx,NxNx,...  
    FF,FFy,FFz,FyF,FyFy,FyFz,FzF,FzFy,FzFz)
```

```
K11=C11*FF*NxNx + C66*FyFy*NN + C55*FzFz*NN;  
K12=C12*FFy*NxN + C66*FyF*NNx;  
K13=C13*FFz*NxN + C55*FzF*NNx;  
K21=C12*FyF*NNx + C66*FFy*NxN;  
K22=C66*FF*NxNx + C22*FyFy*NN + C44*FzFz*NN;  
K23=C23*FyFz*NN + C44*FzFy*NN;  
K31=C13*FzF*NNx + C55*FFz*NxN;  
K32=C23*FzFy*NN + C44*FyFz*NN;  
K33=C55*FF*NxNx + C44*FyFy*NN + C33*FzFz*NN;
```

```
K=[K11,K12,K13;K21,K22,K23;K31,K32,K33];
```

```
End
```

## Anexo 17 Ux

```

function [Ui]=
ux(x,y,z,Li,Ll,num_elementos,e_st,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_total_
nodos_secc,U)
syms r_i
if x~Li(num_elementos+1)
    e_i=length(find((Li>x)==0));
else
    e_i=num_elementos;
end
for pl=1:num_nodos_elem
Uk(:,pl)= U((num_total_nodos_secc*3)*((num_nodos_elem-1)*(e_i-1)+(pl-
1))+1:3:(num_total_nodos_secc*3)*((num_nodos_elem-1)*(e_i-1)+pl));
end
for jod =1:num_nodos_elem
Ut(:,jod)=Uk(conec_secc(e_st,:),jod);
end
r_i=(x-(Li(e_i+1)+Li(e_i))/2)*2/Ll(e_i);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
z_i2=nodos_secc(conec_secc(e_st,5),2);
z_i1=nodos_secc(conec_secc(e_st,1),2);
Llz=z_i2-z_i1;
s=(z-(z_i2+z_i1)/2)*2/Llz;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
y_i2=nodos_secc(conec_secc(e_st,5),1);
y_i1=nodos_secc(conec_secc(e_st,1),1);
Lly=y_i2-y_i1;
r=(y-((y_i2+y_i1)/2))*2/Lly;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
F_i=[0.25*(r.^2-r).* (s.^2-s);
    0.5*(s.^2-s).* (1-r.^2);
    0.25*(r.^2+r).* (s.^2-s);
    0.5*(r.^2+r).* (1-s.^2);
    0.25*(r.^2+r).* (s.^2+s);
    0.5*(s.^2+s).* (1-r.^2);
    0.25*(r.^2-r).* (s.^2+s);
    0.5*(r.^2-r).* (1-s.^2);
    (1-r.^2).* (1-s.^2)];

XNODE=linspace(-1,1,num_nodos_elem);
for i=1:num_nodos_elem;
    xnode=XNODE;xnode(i)=[];
    N_i(1,i)= prod(r_i-xnode)/prod(XNODE(i)-xnode);
end
Ui=0;
for j=1:num_nodos_elem
for b=1:9
    Ui=Ui+Ut(b,j)*F_i(b)*N_i(j);
end
end
end

```

## Anexo 18 Ux\_x

```

function [Ux]=
ux_x(x,y,z,Li,Ll,num_elementos,e_st,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_tota
l_nodos_secc,U)
syms r_i
if x~=Li(num_elementos+1)
    e_i=length(find((Li>x)==0));
else
    e_i=num_elementos;
end
for pl=1:num_nodos_elem
Uk(:,pl)= U((num_total_nodos_secc*3)*((num_nodos_elem-1)*(e_i-1)+(pl-
1))+1:3:(num_total_nodos_secc*3)*((num_nodos_elem-1)*(e_i-1)+pl));
end

for jod =1:num_nodos_elem
Ut(:,jod)=Uk(conec_secc(e_st,:),jod);
end
r_i=(x-(Li(e_i+1)+Li(e_i))/2)*2/Ll(e_i);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
z_i2=nodos_secc(conec_secc(e_st,5),2);
z_i1=nodos_secc(conec_secc(e_st,1),2);
Llz=z_i2-z_i1;
s=(z-((z_i2+z_i1)/2))*2/Llz;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
y_i2=nodos_secc(conec_secc(e_st,5),1);
y_i1=nodos_secc(conec_secc(e_st,1),1);
Lly=y_i2-y_i1;
r=(y-((y_i2+y_i1)/2))*2/Lly;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
F_i=[0.25*(r.^2-r).*(s.^2-s);
    0.5*(s.^2-s).*(1-r.^2);
    0.25*(r.^2+r).*(s.^2-s);
    0.5*(r.^2+r).*(1-s.^2);
    0.25*(r.^2+r).*(s.^2+s);
    0.5*(s.^2+s).*(1-r.^2);
    0.25*(r.^2-r).*(s.^2+s);
    0.5*(r.^2-r).*(1-s.^2);
    (1-r.^2).*(1-s.^2)];
DSF=zeros(1,num_nodos_elem);
XNODE=linspace(-1,1,num_nodos_elem);
for I=1:num_nodos_elem
    xnode=XNODE;xnode(I)=[];
    for J=1:num_nodos_elem
        if J~=I
            xnode2=XNODE;xnode2([I J])=[];
            DSF(1,I)=DSF(1,I)+prod(r_i-xnode2)/prod(XNODE(I)-xnode);
        end
    end
end

Ux=0;
for j=1:num_nodos_elem
for b=1:9
    Ux=Ux+Ut(b,j)*F_i(b)*DSF(j);
end
end
end

```

## Anexo 19 Ux\_y

```

function [Uy]=
ux_y(x,y,z,Li,Ll,num_elementos,e_st,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_tota
l_nodos_secc,U)
syms r_i
if x~=Li(num_elementos+1)
    e_i=length(find((Li>x)==0));
else
    e_i=num_elementos;
end

for pl=1:num_nodos_elem
Uk(:,pl)= U((num_total_nodos_secc*3)*((num_nodos_elem-1)*(e_i-1)+(pl-
1))+1:3:(num_total_nodos_secc*3)*((num_nodos_elem-1)*(e_i-1)+pl));
end

for jod =1:num_nodos_elem
Ut(:,jod)=Uk(conec_secc(e_st,:),jod);
end

r_i=(x-(Li(e_i+1)+Li(e_i))/2)*2/Ll(e_i);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
z_i2=nodos_secc(conec_secc(e_st,5),2);
z_i1=nodos_secc(conec_secc(e_st,1),2);
Llz=z_i2-z_i1;
s=(z-(z_i2+z_i1)/2))*2/Llz;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
y_i2=nodos_secc(conec_secc(e_st,5),1);
y_i1=nodos_secc(conec_secc(e_st,1),1);
Lly=y_i2-y_i1;
r=(y-(y_i2+y_i1)/2))*2/Lly;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Fr=[-(- s.^2 + s).*(r/2 - 1/4);
    2*r.*(- s.^2/2 + s/2);
    -(- s.^2 + s).*(r/2 + 1/4);
    -(s.^2 - 1).*(r + 1/2);
    (r/2 + 1/4).*(s.^2 + s);
    -2*r.*(s.^2/2 + s/2);
    (r/2 - 1/4).*(s.^2 + s);
    -(s.^2 - 1).*(r - 1/2);
    2*r.*(s.^2 - 1)];

XNODE=linspace(-1,1,num_nodos_elem);
for i=1:num_nodos_elem;
    xnode=XNODE;xnode(i)=[];
    N_i(1,i)= prod(r_i-xnode)/prod(XNODE(i)-xnode);
end

Uy=0;
for j=1:num_nodos_elem
for b=1:9
    Uy=Uy+Ut(b,j)*Fr(b)*N_i(j);
end
end
end

```

## Anexo 20 Ux\_z

```

function [Uz]=
ux_z(x,y,z,Li,Ll,num_elementos,e_st,num_nodos_elem,conec_secc,nodos_secc,num_tota
l_nodos_secc,U)
syms r_i
if x~=Li(num_elementos+1)
    e_i=length(find((Li>x)==0));
else
    e_i=num_elementos;
end

for pl=1:num_nodos_elem
Uk(:,pl)= U((num_total_nodos_secc*3)*((num_nodos_elem-1)*(e_i-1)+(pl-
1))+1:3:(num_total_nodos_secc*3)*((num_nodos_elem-1)*(e_i-1)+pl));
end

for jod =1:num_nodos_elem
Ut(:,jod)=Uk(conec_secc(e_st,:),jod);
end

r_i=(x-(Li(e_i+1)+Li(e_i))/2)*2/Ll(e_i);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
z_i2=nodos_secc(conec_secc(e_st,5),2);
z_i1=nodos_secc(conec_secc(e_st,1),2);
Llz=z_i2-z_i1;
s=(z-(z_i2+z_i1)/2))*2/Llz;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
y_i2=nodos_secc(conec_secc(e_st,5),1);
y_i1=nodos_secc(conec_secc(e_st,1),1);
Lly=y_i2-y_i1;
r=(y-(y_i2+y_i1)/2))*2/Lly;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Fs=[-(2*s - 1).*(- r.^2/4 + r/4);
    -(r.^2 - 1).*(s - 1/2);
    (2*s - 1).*(r.^2/4 + r/4);
    -2*s.*(r.^2/2 + r/2);
    (2*s + 1).*(r.^2/4 + r/4);
    -(r.^2 - 1).*(s + 1/2);
    -(2*s + 1).*(- r.^2/4 + r/4);
    2*s.*(- r.^2/2 + r/2);
    2*s.*(r.^2 - 1)];

XNODE=linspace(-1,1,num_nodos_elem);
for i=1:num_nodos_elem;
    xnode=XNODE;xnode(i)=[];
    N_i(1,i)= prod(r_i-xnode)/prod(XNODE(i)-xnode);
end

Uz=0;
for j=1:num_nodos_elem
for b=1:9
    Uz=Uz+Ut(b,j)*Fs(b)*N_i(j);
end
end
end

```