

**UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA**

**CARRERA DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA**



**CONTROL ADAPTATIVO PARA DISMINUIR  
OSCILACIONES EN LA CARGA DE UN  
MECANISMO TIPO GRÚA TORRE**

**TESIS**

Para optar el título profesional de Ingeniero Electrónico

**AUTOR:**

Frank Eduar Barja Quijada 

**ASESOR**

Ruth Vanessa Canahuire Cabello 

Lima - Perú

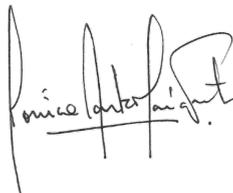
2023

## DECLARACIÓN JURADA

Yo, Mónica Cecilia Santa María Fuster identificada con DNI No 18226712 en mi condición de autoridad responsable de validar la autenticidad de los trabajos de investigación y tesis de la UNIVERSIDAD DE INGENIERIA Y TECNOLOGIA, DECLARO BAJO JURAMENTO:

Que la tesis denominada “CONTROL ADAPTATIVO PARA DISMINUIR OSCILACIONES EN LA CARGA DE UN MECANISMO TIPO GRUA TORRE” ha sido elaborada por el señor Frank Eduar Barja Quijada, con la asesoría de Ruth Vanessa Canahuire Cabello, identificada con DNI 42141373, y que se presenta para obtener el título profesional de Ingeniero electrónico, ha sido sometida a los mecanismos de control y sanciones anti plagio previstos en la normativa interna de la universidad, encontrándose un porcentaje de similitud de 0%.

En fe de lo cual firmo la presente.



Dra. Mónica Santa María Fuster  
Directora de Investigación

En Barranco, el 07 de agosto del 2023

*Dedicatoria:*

*A mis padres por su dedicación y apoyo incondicional.*

*Agradecimientos:*

*A mis hermanos y mi asesora Ruth Canahuire.*

# Índice general

	Pág.
<b>RESUMEN</b> . . . . .	1
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	2
<b>CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN</b>	<b>3</b>
1.1 Descripción de la problemática . . . . .	3
1.2 Objetivos . . . . .	5
1.3 Alcance y limitaciones . . . . .	5
<b>CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES</b>	<b>7</b>
<b>CAPÍTULO 3 MARCO TEÓRICO</b>	<b>11</b>
3.1 Grúas . . . . .	11
3.1.1 La grúa puente . . . . .	12
3.1.2 Polipasto o grúa suspendida . . . . .	12
3.1.3 Grúa pórtico . . . . .	12
3.1.4 Grúa autopropulsada . . . . .	12
3.2 Grúa giratoria . . . . .	13
3.3 Descripción del modelo de la grúa torre . . . . .	13
3.4 Modelo no lineal . . . . .	16
3.4.1 Modelo del subsistema carro-varilla . . . . .	17
3.4.2 Modelo del subsistema motor-polea . . . . .	19
3.5 Modelo dinámico del mecanismo . . . . .	23

3.6 Representación en el espacio de estados . . . . .	25
3.7 Representación del modelo lineal . . . . .	26
3.8 Control proporcional integral derivativo (PID) . . . . .	27
3.9 Control óptimo . . . . .	28
3.10 Control adaptativo por modelo de referencia (MRAC) . . . . .	32
3.10.1Diseño del MRAC . . . . .	34
<b>CAPÍTULO 4 METODOLOGÍA</b>	<b>39</b>
4.1 Diseño en 3D del mecanismo tipo grúa torre . . . . .	39
4.2 Diseño del MRAC para el mecanismo tipo grúa torre . . . . .	39
<b>CAPÍTULO 5 RESULTADOS</b>	<b>44</b>
5.1 Diseño y construcción del mecanismo tipo grúa torre . . . . .	44
5.2 Sistema en lazo abierto . . . . .	48
5.3 Implementación del controlador PID . . . . .	49
5.4 Implementación del controlador LQR . . . . .	50
5.5 Implementación del controlador MRAC . . . . .	52
5.6 Comparación de los controladores . . . . .	54
<b>CONCLUSIONES</b> . . . . .	<b>60</b>
<b>TRABAJO FUTURO</b> . . . . .	<b>62</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .	<b>63</b>
<b>Apéndice A: Planos de los componentes del mecanismo</b> . . . . .	<b>68</b>
<b>Apéndice B: Archivos del diseño e implementación de los controladores</b> . . . . .	<b>80</b>

# Índice de tablas

3.1	VARIABLES DEL MODELO MATEMÁTICO. . . . .	23
5.1	Características de la transmisión reductora. . . . .	46
5.2	Parámetros del modelo grúa torre. . . . .	49
5.3	Comparación del posicionamiento del carro. . . . .	56
5.4	Comparación del ángulo de oscilación del péndulo. . . . .	57
5.5	Oscilación frente a una perturbación. . . . .	58

# Índice de figuras

3.1	Tipos de grúas: (a) grúa puente, (b) grúa pórtico, (c) grúa pórtico, (d) grúa autopropulsada, (e) grúa autopropulsada y (f) grúa giratoria. . . . .	14
3.2	Partes de una grúa torre según ITC-MIE-AEM-2. . . . .	14
3.3	Grados de libertad de una grúa torre. . . . .	15
3.4	Sistema a modelar del mecanismo tipo grúa torre. . . . .	17
3.5	Subsistema carro-péndulo de la grúa. . . . .	18
3.6	Subsistema motor-polea de la grúa. . . . .	19
3.7	Diagrama en lazo cerrado del controlador PID. . . . .	27
3.8	Diagrama de bloques del regulador proporcional integral. . . . .	28
3.9	Sistema de control adaptativo por modelo de referencia. . . . .	33
4.1	Diseño en 3D del mecanismo tipo grúa torre. . . . .	40
4.2	Partes del diseño del mecanismo tipo grúa torre. . . . .	40
4.3	Identificación de variables del modelo en el diseño en 3D. . . . .	41
5.1	Motor DC usado para el movimiento del carro. . . . .	45
5.2	Motor DC usado para el movimiento de la pluma. . . . .	45
5.3	Transmisión reductora usada para el movimiento de la pluma. . . . .	45
5.4	Puente H usado en el mecanismo tipo grúa torre. . . . .	47
5.5	Dimensiones del mecanismo tipo grúa torre. . . . .	47
5.6	Mecanismo tipo grúa torre de tres grados de libertad construido. . . . .	48
5.7	Implementación del lazo abierto: ángulo del péndulo $\alpha$ . . . . .	50
5.8	Implementación del PID: posición del carro $r$ . . . . .	51

5.9	Implementación del PID: posición angular del péndulo $\alpha$ .	51
5.10	Implementación del PID: señal de control $v$ .	52
5.11	Implementación del controlador LQR: posición del carro $r$ .	53
5.12	Implementación del controlador LQR: posición angular del péndulo $\alpha$ .	53
5.13	Implementación del controlador LQR: señal de control $v$ .	54
5.14	Implementación del controlador MRAC: posición del carro $r$ .	54
5.15	Implementación del controlador MRAC: posición angular del péndulo $\alpha$ .	55
5.16	Implementación del controlador MRAC: señal de control $v$ .	55
5.17	Posición del carro para $r = 0.2$ .	56
5.18	Ángulo de oscilación del péndulo.	57
5.19	Reacción a la perturbación.	58

## RESUMEN

La oscilación que se presenta en la cuerda de una grúa cuando está transportando una carga, es un fenómeno muy común y perjudicial pues puede presentar diversos problemas como el aumento del tiempo requerido para el transporte de la carga y pérdida de precisión del punto final deseado de la carga, además pone en riesgo la seguridad de los operarios que participan del proceso de transporte. Diversas investigaciones han sido desarrolladas con la finalidad de disminuir las amplitudes de oscilación producidas en las grúas durante el transporte de la carga. En ese sentido, el control adaptativo es una metodología que tiene como objetivo principal mantener el desempeño constante de un sistema en presencia de una variación desconocida en algún parámetro de su modelo o ingreso de incertidumbre, razón por la cual es muy atractivo para su aplicación en el control de grúas debido a las características de su comportamiento.

Este trabajo comprende la construcción de un mecanismo tipo grúa torre, diseño e implementación de un controlador adaptativo por modelo de referencia (MRAC), con la finalidad de reducir las oscilaciones producidas por la carga, el desempeño del controlador adaptativo fue comparado con un controlador PID y LQR. Los resultados mostraron que los controladores PID y LQR disminuyeron completamente las oscilaciones luego de 20.6 segundos y 7.9 segundos respectivamente, mientras que al controlador MRAC le tomó 4.86 segundos lo que demuestra su superioridad en términos de reducción de oscilación en la carga. Además, en cuanto al posicionamiento del carro, el controlador MRAC no presentó sobreimpulso mientras que el PID y LQR presentaron 26 % y 0.9 % de sobreimpulso, respectivamente.

### **Palabras clave:**

Grúa torre; MRAC; Control LQR; Control PID.

## **ABSTRACT**

### **ADAPTIVE CONTROL TO REDUCE PAYLOAD OSCILLATIONS OF A TOWER CRANE MECHANISM**

The oscillation that occurs in crane cable during payload conveying, is a common phenomenon and detrimental since can present several problems such as an increase in time required to convey the payload and precision loss of end point desired of payload, also puts the safety of human operators risk involved in the conveying process. Several researches have been developed in order to reduce oscillation produced in cranes during payload conveying. In that sense, adaptive control is a methodology whose main objective is to maintain the continuous performance of a system in the presence of an unknown variation in some parameter of its model or income uncertainty, for this reason is attractive for the application in crane control due to the characteristics of their behavior.

This dissertation includes the construction of a tower crane prototype, design and implementation of a Model Reference Adaptive Controller (MRAC), in order to reduce the oscillations caused by the payload, performance of the designed adaptive controller was compared to the PID and LQR controller. The results of implementation showed that PID and LQR controller decrease oscillations after 20.6 seconds and 7.9 seconds respectively, whereas the MRAC controller decrease oscillations in 4.86 seconds, this demonstrates superiority of proposed controller in terms of decrease oscillation in the payload. In addition, about a trolley positioning, the MRAC controller did not present overshoot whereas the PID and LQR controller presented 26 % and 0.9 % overshoot, respectively.

#### **Keywords:**

Tower crane; MRAC; LQR control ; PID control.

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta la problemática y motivación principal de este trabajo, también se explica el estado actual de las soluciones al problema de oscilación que se produce en la carga de las grúas durante el transporte. Luego, se expone el objetivo principal y los cuatro objetivos específicos de la solución propuesta en esta tesis. Finalmente, se describe el alcance y limitaciones de este trabajo.

### 1.1 Descripción de la problemática

La grúa es una máquina dedicada a la elevación y movimiento de diversas cargas que son suspendidas mediante ganchos, cucharas o electroimanes los cuales se denominan órganos de aprehensión. La estructura mecánica varía dependiendo del tipo de grúa, por ejemplo, se tiene las grúas giratorias, grúas puente, grúas pórtico, entre otras configuraciones [1].

Una grúa torre puede ser clasificada dentro del grupo de grúas rotatorias. Este equipo es muy usado para la carga y descarga de distintos materiales principalmente en actividades como la construcción de edificios. La grúa torre puede ser definida como un sistema pendular de transporte contando con un cable de soporte aéreo empleado para elevar y transportar la carga útil [2]. Si bien este péndulo es el encargado de proporcionar la utilidad fundamental de las grúas, también es el que genera la oscilación de la carga útil. Estas oscilaciones generadas debido a la inercia de la carga son indeseables, pues pueden causar resonancia a la estructura de soporte pudiendo afectar la seguridad de los operarios involucrados en el proceso de transporte de carga de la grúa. En este contexto,

es recomendable diseñar un sistema de control para reducir las oscilaciones sobre la carga de la grúa.

Existen diversas metodologías de control que pueden ser utilizadas para reducir las amplitudes de vibración en sistemas mecánicos. Estas metodologías, como los controladores proporcional integral derivativo (PID, por sus siglas en inglés), [3] [4], regulador cuadrático lineal (LQR, por sus siglas en inglés) [5] o predictivo [6], deben ser adaptados, en su síntesis de control, para lograr la reducción de las amplitudes de oscilación. En ese sentido, el control adaptativo es una metodología que tiene como objetivo principal mantener el desempeño constante del sistema en presencia de una variación desconocida en algún parámetro de su modelo o ingreso de incertidumbre. En este contexto, el uso del controlador adaptativo es atractivo para el problema propuesto dado que el objetivo es la disminución de las oscilaciones de la carga.

Para diseñar controladores adaptativos existen dos métodos, el control adaptativo por modelo de referencia (MRAC, por sus siglas en inglés) y el método de autosintonización. Para el desarrollo de este trabajo se usó el control adaptativo por modelo de referencia. Así, la aplicación del MRAC sobre el modelo de la grúa torre permitirá tratar los efectos producidos por las oscilaciones sobre la carga ofreciendo un buen comportamiento frente a la variación de las cargas que transporta. El control MRAC diseñado fue comparado con un controlador PID y LQR, de manera que se demostró su desempeño frente al efecto de oscilación producido por la carga durante el transporte de la carga útil.

Este trabajo se basó en el diseño de un controlador adaptativo por modelo de referencia para reducir las oscilaciones producidas por la carga total en un mecanismo tipo grúa torre para:

- Disminuir las oscilaciones.
- Mejorar la eficiencia de la grúa, en cuanto a tiempo de transporte.
- Disminuir posibles accidentes.

La metodología utilizada en esta investigación se puede generalizar para aplicaciones que sufren el mismo problema de oscilación. Por ejemplo, el transporte de carga realizado por drones. Para ello, se debe tener en cuenta las características del modelo del sistema al que se implementará el controlador.

## **1.2 Objetivos**

El objetivo principal de este trabajo es diseñar un controlador MRAC, para reducir la amplitud de las oscilaciones producidas por el transporte de carga de un mecanismo tipo grúa torre. Este objetivo se desarrolló a partir de cuatro objetivos específicos que se describen a continuación:

- Diseñar y construir el mecanismo tipo grúa torre. Para diseñar el mecanismo se usó el software Inventor y su posterior construcción fue realizada usando el material acero H1045.
- Diseñar el controlador adaptativo con la ayuda del software Matlab y Simulink.
- Implementar experimentalmente el controlador. Para ello se usó el mecanismo tipo grúa torre, y la tarjeta RaspberryPi 3B+, la cual fue programada usando el lenguaje Python.
- Evaluar el desempeño del controlador implementado. En ese sentido, se comparó el comportamiento del controlador MRAC con el de un controlador PID y LQR.

## **1.3 Alcance y limitaciones**

En este trabajo se diseñó y construyó una grúa torre de tres grados de libertad, compuesto por el ángulo de giro de la pluma, el movimiento del carro y el ángulo de oscilación de la carga. El alcance de esta tesis es el diseño de un controlador MRAC que se

enfocó en disminuir las oscilaciones que se producen durante el transporte de la carga en un mecanismo tipo grúa torre. Asimismo, se evaluó el desempeño del controlador MRAC comparándolo con un controlador PID y LQR. Para el diseño de los controladores, se planteó el grado de libertad dado por el giro de la pluma como una restricción (no se usará en el modelo matemático), y se controló los grados de libertad del carro y el péndulo, obteniendo como resultado el control de un grado de libertad actuado dado por el movimiento del carro y un grado de libertad subactuado representado por el ángulo de oscilación de la carga, estos dos grados de libertad controlados dan origen a los parámetros de desempeño usados para las comparaciones de los controladores que son el posicionamiento del carro y la reducción de oscilación en la carga.

## Capítulo 2

### ANTECEDENTES

Actualmente, las grúas son muy usadas en aplicaciones industriales para levantar, mover y transportar cargas pesadas. Sin embargo, este movimiento en la grúa puede ocasionar oscilaciones indeseables en la carga, la cual tiene resultados perjudiciales en el sistema de control. Estas oscilaciones pueden causar accidentes, arriesgar la seguridad de las personas y dañar el entorno en el que se desarrolla el proceso de transporte de la carga [7].

Las investigaciones de accidentes en grúas demuestran que el 11 % tuvieron consecuencias fatales. Los motivos más recurrentes son los fuertes vientos, la pérdida del control del centro de gravedad, falla en los estabilizadores y tirones laterales [8]. Además, se tiene varios registros de accidentes en grúas torres ocasionados porque el cable de carga entro en contacto con una línea eléctrica cercana al área de trabajo [9].

La Administración de Seguridad y Salud Ocupacional de EE.UU. (OSHA, por sus siglas en inglés) define el tirón lateral en grúas como el movimiento que genera la carga al ser transportada en el sentido opuesto al cable ya que intentará centrarse debajo del polipasto, esto produce el efecto péndulo en la carga ocasionando que oscile y pueda generar un accidente. Los vientos que se generan de manera lateral a la carga también ocasionan problemas en la operatividad dado que introduce tirones laterales en la grúa ocasionando que la carga se mueva hacia los lados. Los tirones laterales son una de las causas más comunes de fallas en grúas, representan alrededor de 175 heridos y 45 muertos en EE.UU. cada año [10].

Las grúas son sistemas subactuados debido a que las entradas de control son menores que los grados de libertad del sistema, debido a este comportamiento subactuado, es

muy difícil controlar adecuadamente una grúa [7]. Diversas metodologías de control dedicadas a brindar un seguimiento eficaz de grúas han sido desarrolladas. Con este objetivo, en [7] se diseñó un controlador utilizando la teoría de estabilidad de Lyapunov, mientras que en [11] se usó el método de control por modos deslizantes (SMC, del inglés “*sliding mode control*”).

Otro de los objetivos desarrollados por las investigaciones dedicadas a grúas, consiste en minimizar el ángulo de oscilación generada por el transporte de la carga útil. En ese sentido, algunos métodos realizados son: control de seguimiento de una grúa torre con respecto a una serie de trayectorias [7], control de velocidad de tiempo óptimo para permitir movimientos rápidos y sin oscilaciones de una grúa torre [12], técnica de generación de comandos con la finalidad de suprimir la dinámica oscilatoria del cable de una grúa [13], retroalimentación de posición retrasada para reducir las oscilaciones de una grúa giratoria [2]. Asimismo, se ha investigado métodos de control de realimentación de lazo cerrado, control de acoplamiento no lineal, control de linealización de realimentación parcial, control adaptativo, control basado en el observador, control basado en lógica difusa, control basado en algoritmos genéticos, entre otros [14].

Un enfoque particular es el control robusto, que tiene como principal ventaja considerar la incertidumbre del modelo durante su diseño [15]. De esta manera, en [16] se presentó un controlador robusto de estructura variable que puede ser implementada en sistemas en movimiento real. La robustez del algoritmo desarrollado garantiza una respuesta rápida y sin overshoot dentro del intervalo de perturbación establecida. En [15] se empleó un controlador robusto para sintonizar los parámetros virtuales de un generador síncrono virtual (VSG, por sus siglas en inglés), de manera que pueda considerar las fluctuaciones e incertidumbre de la fuente de energía renovable (RES, por sus siglas en inglés) y en [17] fue propuesto un controlador robusto para un convertidor reductor de corriente continua a corriente continua, debido a su comportamiento no lineal y variante en el tiempo.

Asimismo, existen diversas investigaciones dedicadas al control robusto de grúas. En [18] se desarrolló un controlador robusto PID adaptativo para el posicionamiento de un buque grúa debido a su comportamiento inestable cuando se encuentra operando en el mar. Mientras que en [19] se realizó un controlador robusto basado en lógica difusa para reducir las oscilaciones de una grúa. El controlador robusto fue empleado debido a la variación de los parámetros que sufre la grúa cuando se encuentra en operación. Por otro lado, en [11] se propuso un controlador robusto por modos deslizantes para reducir las oscilaciones producidas en la carga de una grúa puente utilizando las fuerzas que mueven el carro y la viga puente, en [20] se presentó un controlador robusto basado en un problema de optimización usando las desigualdades matriciales lineales (LMI, por sus siglas en inglés) para una grúa pórtico considerando el efecto que ocasiona la variación de la longitud del cable en su diseño y en [21] se desarrolló un controlador robusto mediante la modificación de conformadores de entrada para una grúa giratoria evaluando el desempeño del controlador en cuanto a reducción del ángulo de oscilación.

Orientado también en el control robusto de grúas, en [22] se desarrolló un controlador H-infinito ( $\mathcal{H}_\infty$ ) usando el enfoque LMI con la finalidad de reducir la oscilación y obtener un posicionamiento preciso de la carga, mientras que en [23] se consideró la fricción del carro de una grúa pórtico como una entrada de perturbación desconocida al diseño de su controlador  $\mathcal{H}_\infty$  con el objetivo de lograr un posicionamiento rápido del carro y una oscilación mínima en la carga. En tanto, en [5] se diseñó un controlador  $\mathcal{H}_\infty$  usando la ubicación de polos en la región LMI, el cual fue implementado en un sistema a escala de una grúa giratoria para controlar el ángulo del brazo con un ángulo de oscilación mínimo y en [24] se optó por usar un controlador  $\mathcal{H}_\infty$  debido a la no linealidad del sistema grúa puente, la estabilidad del lazo de control implementado fue comprobado mediante el análisis de estabilidad de Lyapunov.

Este trabajo de investigación tiene como alcance el diseño de un controlador MRAC que se enfocó en disminuir las oscilaciones que se producen en el transporte de la carga

útil de un mecanismo tipo grúa torre. Para ello, fue diseñado el controlador MRAC para un mecanismo tipo grúa torre de tres grados de libertad, que fue implementado usando la tarjeta RaspberryPi 3B+ mediante el lenguaje de programación Python. Además, fue comparado con un controlador PID y LQR, con la finalidad de evaluar su desempeño.

## Capítulo 3

# MARCO TEÓRICO

En este capítulo se define el concepto de grúa y se describe brevemente cada tipo de grúa que existe. Luego, se presenta el modelo matemático del mecanismo y se muestra la representación en espacio de estados. Posteriormente, se expone el esquema de control PID, LQR y adaptativo por modelo de referencia (MRAC), con el fin de explicar su funcionamiento.

### 3.1 Grúas

El transporte de grandes cargas es una necesidad fundamental en la industria. Con ese fin, desde principios de la Revolución Industrial se han desarrollado diversas máquinas que han sido mejoradas con el transcurso del tiempo, en cuanto a capacidad y rendimiento. En ese sentido, la grúa es una de las máquinas de elevación y transporte más usada actualmente [1].

Existe una gran diversidad de grúas en el mercado. Esto se debe a que las aplicaciones que tienen son diversas, por ello hay grúas de diferentes tamaños y estructuras. Cada tipo de grúa cuenta con ciertas características que la hacen prevalecer a otras por la aplicación en la que se van a enfocar. De esta manera, se considera importante tener en cuenta conocimientos básicos de cada tipo de grúa, a continuación, se define los tipos de grúas más solicitados en la industria los cuales pueden ser observados en la Figura 3.1 (Imagen tomada de [25]).

### **3.1.1 La grúa puente**

Esta grúa está compuesta por una estructura tipo viga simple o combinada, en donde se desliza el elemento de elevación y se traslada por medio de dos raíles fijados a la estructura de la construcción (comúnmente un edificio). Este tipo de grúas son muy utilizadas dentro de talleres por la mecánica que posee.

### **3.1.2 Polipasto o grúa suspendida**

Este tipo de grúas posee un polipasto eléctrico que se desplaza a través de una viga. Asimismo, esta también se mueve a otras vigas unidas a la estructura fija del lugar. Estas grúas también son conocidas como polipastos y usualmente se utiliza para cargas menores de 5 toneladas. Esta grúa se destaca por la sencillez que tiene el sistema de traslación, en donde se enfoca que el movimiento del polipasto se realice suavemente.

### **3.1.3 Grúa pórtico**

Esta grúa es similar a la grúa puente, con la diferencia de que este posee una estructura móvil de apoyo al suelo. Esta estructura tiene forma de pórtico y es por ello que se le denomina así a este grupo de grúas. Es muy usual encontrar este tipo de grúas en puertos o grandes estaciones de estiba y almacenaje de cargas grandes.

### **3.1.4 Grúa autopropulsada**

Las grúas autopropulsadas son similares a las grúas giratorias, sin embargo, en este tipo de grúas los elementos de elevación y transporte se encuentra embarcados sobre un transporte móvil.

## 3.2 Grúa giratoria

Las grúas giratorias pueden maniobrar el transporte de la carga útil con movimientos circulares. Este tipo de grúas se subdividen principalmente en dos grupos:

- **Grúas radiales:** Las grúas radiales están compuestas por una columna resistente que se fija con un brazo que tiene un polipasto, el cual se puede desplazar a través del brazo. Esta columna absorbe todas las tensiones a las que se somete la grúa cuando está transportando y elevando su carga útil.
- **Grúas de plataforma giratoria:** Las grúas de plataforma giratoria poseen la capacidad de girar  $360^\circ$  para transportar la carga útil. Para contrarrestar las tensiones a las cuales están sometidas durante el transporte, requieren de un contrapeso en la parte opuesta a la carga. Estas grúas también son conocidas como grúa torre y usualmente se utilizan en construcciones civiles. Un tipo de grúa de plataforma giratoria es la llamada grúa torre. El diseño de la grúa torre puede variar según el fabricante. Sin embargo, el Manual de Inspecciones de Grúas Torre (ITC-MIE-AEM-2) lo representa mediante diez partes las cuales se muestran en la Figura 3.2 (imagen basada en [26]).

## 3.3 Descripción del modelo de la grúa torre

Existen diferentes enfoques para caracterizar el modelo de una grúa torre. En [27] se modela la grúa torre como un sistema de tres grados de libertad. El primer grado de libertad viene dado por el ángulo de rotación  $\theta(t)$ , que representa la rotación de la pluma alrededor de la torre de la grúa. El segundo grado de libertad representa el desplazamiento del carro a lo largo de la pluma  $r(t)$  y el tercer grado de libertad está dado por la variación de la longitud del cable para transportar la carga  $l(t)$ .

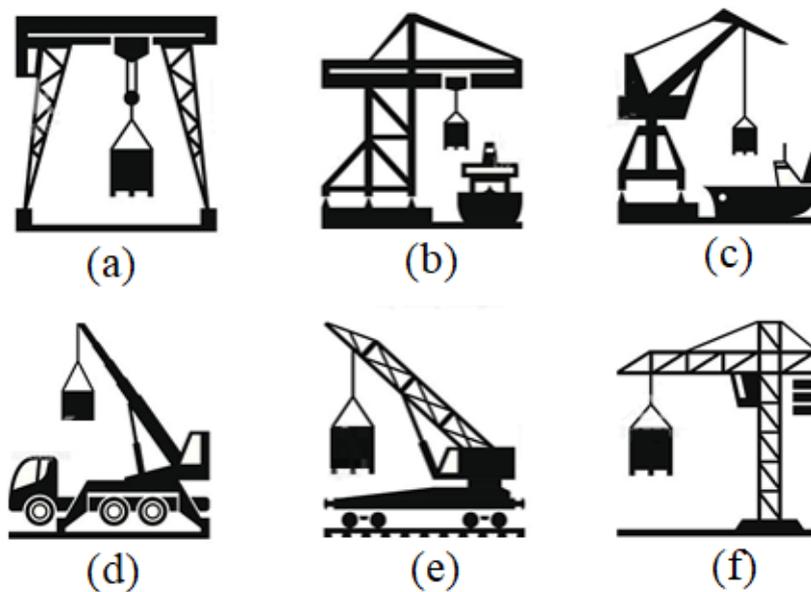


FIGURA 3.1: Tipos de grúas: (a) grúa puente, (b) grúa pórtico, (c) grúa pórtico, (d) grúa autopropulsada, (e) grúa autopropulsada y (f) grúa giratoria.

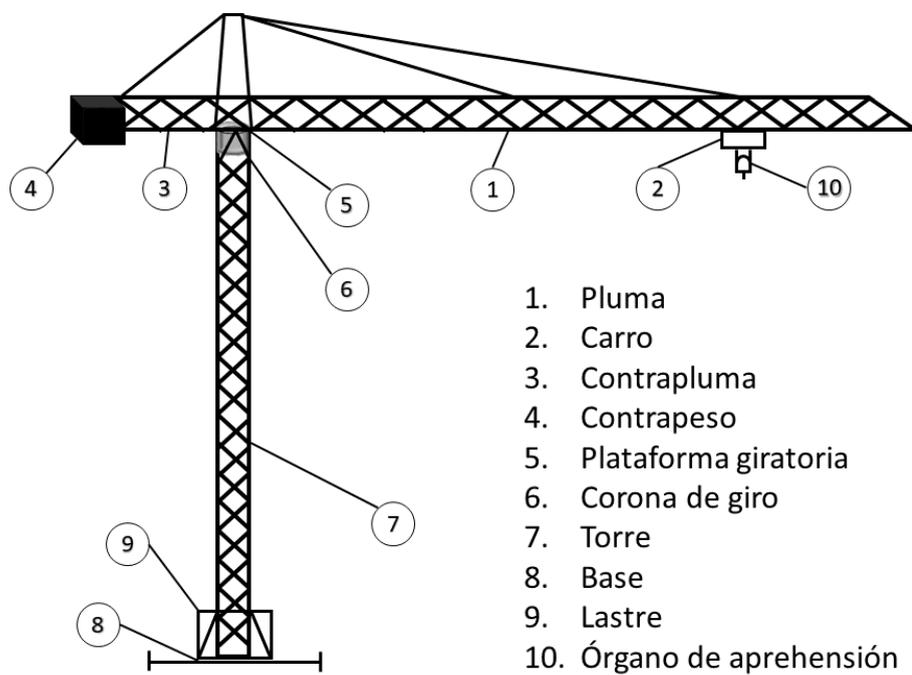


FIGURA 3.2: Partes de una grúa torre según ITC-MIE-AEM-2.

Por otro lado, algunas investigaciones modelan la grúa torre como un sistema de cuatro grados de libertad. En [28] y [29] se consideran los grados de libertad  $\theta(t)$  y  $r(t)$  antes descritos, mientras que los dos grados de libertad restantes vienen dados por los ángulos  $\alpha(t)$ , que representa el ángulo de oscilación de la carga respecto al eje  $x$ , y  $\beta(t)$ , que representa el ángulo de oscilación de la carga respecto al eje  $y$ . Estos grados de libertad pueden ser apreciados en la Figura 3.3 (imagen basada en [12]).

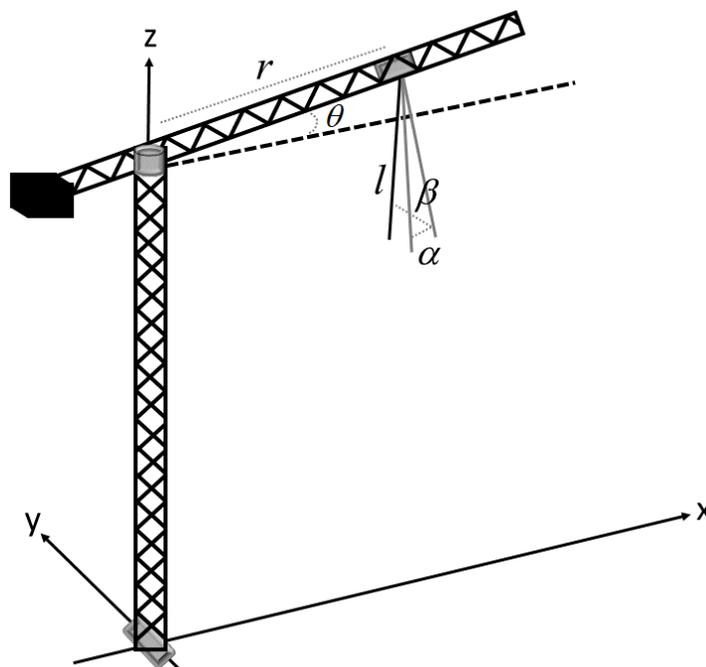


FIGURA 3.3: Grados de libertad de una grúa torre.

Para el análisis de la grúa torre con cuatro grados de libertad, se considera que  $l$  es un cable con longitud invariable. Sin embargo, en [12] se modela la grúa torre como un sistema con cinco grados de libertad, en el cual se añade la variación de la longitud de la cuerda, es decir  $l(t)$ , como el quinto grado de libertad para el sistema grúa torre.

Una grúa es por naturaleza un sistema mecánico no lineal subactuado, esto quiere decir que posee menos entradas de control que grados de libertad, en el caso de la grúa torre el operador ubicado en la cabina de control, solo es capaz de manipular tres grados

de libertad: el movimiento rotacional de la pluma, el movimiento horizontal del carro y el movimiento vertical de la carga sostenida a través del cable [12].

El uso amplio de las grúas en talleres, industria, construcción de edificios, puertos y en varias aplicaciones donde se trasladan cargas requieren que el carro se mueva rápido, sin embargo, este movimiento genera oscilaciones indeseables en la carga. La dificultad para lograr el movimiento rápido del carro y atenuación de la oscilación de la carga de manera simultánea, se debe a que el sistema de control de la grúa está subactuado [24], razón por la cual los objetivos de control que abarca esta tesis, que son el posicionamiento deseado con precisión del carro y la disminución de oscilaciones en la carga útil del sistema son complejos [30].

### **3.4 Modelo no lineal**

En esta tesis el mecanismo tipo grúa torre propuesto cuenta con 3 grados de libertad los cuales son:  $r$  que es el desplazamiento del carro,  $\alpha$  que es el ángulo de oscilación de la carga y  $\theta$  que es el ángulo de giro de la pluma, para fines de este trabajo  $\theta$  es considerado como una restricción, es decir no se ha considerado en el modelo. Con estos grados de libertad identificados, se procede a desarrollar el modelo no lineal del mecanismo tipo grúa torre. En ese sentido, el sistema a modelar del mecanismo es el que se muestra en la Figura 3.4. Con el fin de obtener las ecuaciones del modelo no lineal del mecanismo mostrado en la Figura 3.4, en [31] se ha subdividido el proceso en dos subsistemas: carro-varilla y motor-polea.

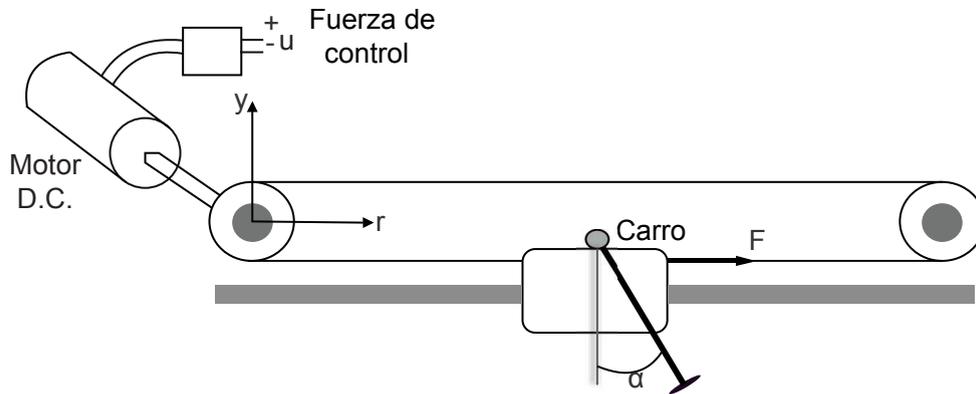


FIGURA 3.4: Sistema a modelar del mecanismo tipo grúa torre.

### 3.4.1 Modelo del subsistema carro-varilla

El subsistema carro-varilla se representa en la Figura 3.5. En la figura se puede apreciar que los centros de gravedad de la varilla ( $r_v$ ) y de la carga ( $r_l$ ) son:

$$r_v = r - \frac{l_v}{2} \sin(\alpha), \quad (3.1)$$

$$r_l = r - l_l \sin(\alpha), \quad (3.2)$$

donde  $l_v$  es la longitud de la varilla y  $l_l$  es la longitud del centro del carro a la carga.

Aplicando la segunda ley de Newton para el movimiento lineal en la dirección  $r$ , se obtiene:

$$m_c \frac{d^2}{dt^2} r + m_l \frac{d^2}{dt^2} r_l + m_v \frac{d^2}{dt^2} r_v = F, \quad (3.3)$$

donde  $m_c$  es la masa del carro,  $m_l$  es la masa de la carga y  $m_v$  es la masa de la varilla.

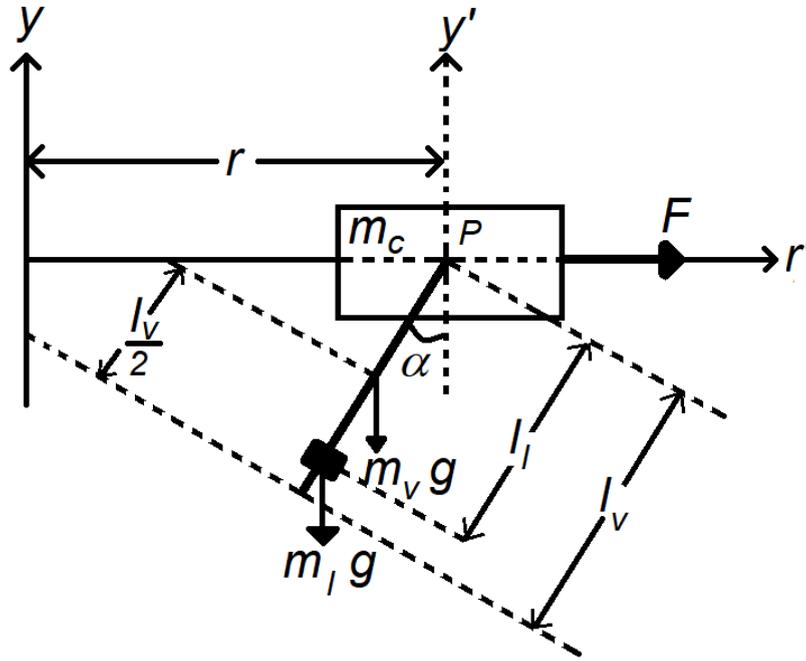


FIGURA 3.5: Subsistema carro-péndulo de la grúa.

Luego, reemplazando (3.1) y (3.2) en (3.3), se obtiene:

$$m_c \frac{d^2}{dt^2} r + m_l \frac{d^2}{dt^2} (r - l_l \sin(\alpha)) + m_v \frac{d^2}{dt^2} (r - \frac{l_v}{2} \sin(\alpha)) = F, \quad (3.4)$$

desarrollando las derivadas de (3.4), se tiene:

$$(m_c + m_l + m_v) \ddot{r} + (m_l l_l + m_v \frac{l_v}{2}) (\sin(\alpha)) \dot{\alpha}^2 - (m_l l_l + m_v \frac{l_v}{2}) (\cos(\alpha)) \ddot{\alpha} = F. \quad (3.5)$$

Después, aplicando nuevamente la segunda ley de Newton para el movimiento rotatorio alrededor del punto  $P$  de la Figura 3.5, se tiene:

$$(J_l + J_v) \ddot{\alpha} = m_l \ddot{r} (\cos(\alpha)) l_l + m_v \ddot{r} (\cos(\alpha)) \frac{l_v}{2} - m_l g (\sin(\alpha)) l_l - m_v g (\sin(\alpha)) \frac{l_v}{2}, \quad (3.6)$$

y ordenando los términos, se tiene:

$$(m_l l_l + m_v \frac{l_v}{2}) \ddot{r}(\cos(\alpha)) - (m_l l_l + m_v \frac{l_v}{2}) g(\sin(\alpha)) = (J_l + J_v) \ddot{\alpha}, \quad (3.7)$$

donde  $J_l$  es el momento de inercia de la carga definida por:

$$J_l = m_l l_l^2,$$

y  $J_v$  es el momento de inercia de la varilla definida por:

$$J_v = m_v \frac{l_v^2}{3}.$$

### 3.4.2 Modelo del subsistema motor-polea

El subsistema motor-polea puede ser apreciado en la Figura 3.6. El modelo de la parte eléctrica mostrada se encuentra aplicando la ley de voltajes de Kirchoff. El valor de la inductancia ( $L_a$ ) se desprecia en el modelo, debido a que en este tipo de motores DC el valor es pequeño. De esta manera, se obtiene:

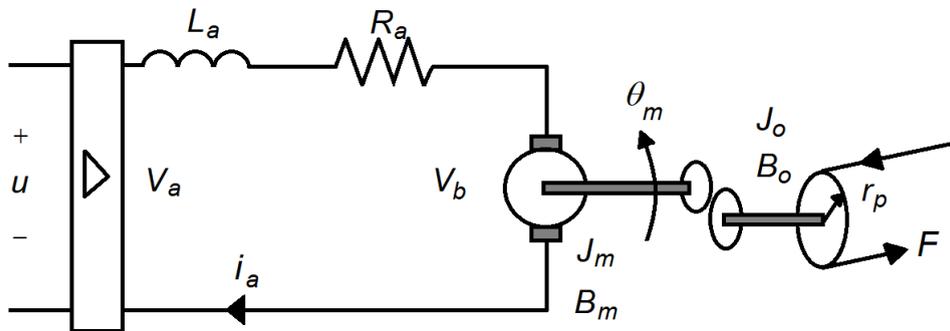


FIGURA 3.6: Subsistema motor-polea de la grúa.

$$R_a i_a + V_b = K_A u = V_a, \quad (3.8)$$

donde  $R_a$  es la resistencia de armadura del motor,  $i_a$  es la corriente del circuito,  $K_A$  es la ganancia del amplificador,  $u$  es la señal de control y  $V_b$  es el voltaje contraelectromotriz representado por:

$$V_b = K_b \dot{\theta}_m, \quad (3.9)$$

donde  $K_b$  es la constante electromotriz y  $\theta_m$  es la posición del eje del motor.

Aplicando la segunda ley de Newton en el movimiento rotatorio del sistema mecánico del motor, se obtiene:

$$T_m = J_{eq} \ddot{\theta}_m + B_{eq} \dot{\theta}_m + nFr_p, \quad (3.10)$$

donde  $n$  es el factor de reducción del motor,  $r_p$  es el radio de la polea, mientras que  $J_{eq}$  y  $B_{eq}$  vienen dados por:

$$J_{eq} = J_m + n^2(J_o + J_p), \quad (3.11)$$

$$B_{eq} = B_m + n^2B_o, \quad (3.12)$$

donde  $J_m$  es el momento de inercia del eje primario del motor,  $J_o$  es el momento de inercia del eje secundario del motor,  $J_p$  es el momento de inercia de la polea,  $B_m$  es la fricción viscosa del eje primario y  $B_o$  es la fricción viscosa del eje secundario.

El torque que se produce en el eje del motor está dado por la ecuación:

$$T_m = K_m i_a, \quad (3.13)$$

donde  $K_m$  es la constante de torque del motor.

Reemplazando (3.13) en (3.10) y despejando  $i_a$ , se tiene:

$$i_a = \frac{J_{eq}}{K_m} \ddot{\theta}_m + \frac{B_{eq}}{K_m} \dot{\theta}_m + \frac{nr_p}{K_m} F. \quad (3.14)$$

Después, reemplazando (3.14) y (3.9) en (3.8) y despejando  $F$ , se obtiene:

$$F = \frac{K_m K_A}{R_a n r_p} u - \frac{J_{eq}}{n r_p} \ddot{\theta}_m - \left( \frac{B_{eq}}{n r_p} + \frac{K_m K_b}{R_a n r_p} \right) \dot{\theta}_m. \quad (3.15)$$

Luego, para transformar el desplazamiento angular del motor ( $\theta_m$ ) en el desplazamiento horizontal del carro ( $r$ ) en función del radio de la polea ( $r_p$ ) y el factor de reducción del motor ( $n$ ), se define:

$$\theta_m = \frac{r}{n r_p}. \quad (3.16)$$

Reemplazando (3.16) en (3.15), se obtiene la siguiente ecuación del subsistema motor-polea:

$$F = \frac{K_m K_A}{R_a n r_p} u - \frac{J_{eq}}{n^2 r_p^2} \ddot{r} - \left( \frac{B_{eq}}{n^2 r_p^2} + \frac{K_m K_b}{R_a n^2 r_p^2} \right) \dot{r}. \quad (3.17)$$

Las ecuaciones (3.5), (3.7) y (3.17) representan el modelo matemático del mecanismo de la Figura 3.4 controlado por la corriente de armadura del motor. Estas ecuaciones

pueden ser reescritas de la siguiente manera:

$$\ddot{r} = -\frac{M_2}{M_1} \sin(\alpha) \dot{\alpha}^2 + \frac{M_2}{M_1} \cos(\alpha) \ddot{\alpha} + \frac{1}{M_1} F, \quad (3.18)$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{M_2}{J_1} g \sin(\alpha) + \frac{M_2}{J_1} \cos(\alpha) \ddot{r}, \quad (3.19)$$

$$F = K_x K_A u - J_2 \ddot{r} - B_x \dot{r}, \quad (3.20)$$

donde:

$$M_1 = m_c + m_l + m_v,$$

$$M_2 = m_l l_l + m_v \frac{l_v}{2},$$

$$J_1 = J_l + J_v,$$

$$J_2 = \frac{J_{eq}}{n^2 r_p^2},$$

$$K_x = \frac{K_m}{R_a n r_p},$$

$$B_x = \frac{B_{eq}}{R_a n r_p} + \frac{K_b K_m}{n^2 r_p^2 R_a},$$

$$J_2 = \frac{J_{eq}}{n^2 r_p^2},$$

$$K_x = \frac{K_m}{R_a n r_p},$$

$$B_x = \frac{B_{eq}}{R_a n r_p} + \frac{K_b K_m}{n^2 r_p^2 R_a},$$

la descripción de todas las variables del modelo matemático del sistema dados por (3.18), (3.19) y (3.20), son mostrados en la Tabla 3.1.

TABLA 3.1: Variables del modelo matemático.

Símbolo	Descripción
$r$	posición del carro
$\alpha$	posición angular de la varilla
$\theta$	posición angular de la pluma
$F$	fuerza aplicada al carro
$u$	señal de control
$g$	gravedad
$K_m$	constante de torque del motor
$R_a$	resistencia de armadura del motor
$n$	factor de reducción del motor
$r_p$	radio de la polea
$K_A$	ganancia del amplificador
$B_m$	fricción viscosa del eje primario
$B_o$	fricción viscosa del eje secundario
$B_{eq}$	fricción viscosa equivalente
$K_b$	constante electromotriz
$K_m$	constante de torque del motor
$m_c$	masa del carro
$m_l$	masa de la carga
$m_v$	masa de la varilla
$l_l$	longitud del centro del carro a la carga
$l_v$	longitud la varilla
$J_m$	momento de inercia del eje primario del motor
$J_o$	momento de inercia del eje secundario del motor
$J_p$	momento de inercia de la polea
$J_l$	momento de inercia de la carga
$J_v$	momento de inercia de la varilla
$J_{eq}$	momento de inercia equivalente

### 3.5 Modelo dinámico del mecanismo

Una gran variedad de sistemas no lineales pueden ser descritos mediante su modelo dinámico de Lagrange de la siguiente forma [32]:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{P}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{d}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}, \quad (3.21)$$

donde  $\mathbf{M}$  es una matriz simétrica definida positiva y la matriz  $\mathbf{P}$  y el vector  $\mathbf{d}$  se determinan a partir del modelo dinámico no lineal del sistema. Para el caso del mecanismo de la grúa  $\mathbf{M}$  representa la inercia del sistema,  $\mathbf{P}$  contiene a los torques centrípetos y de Coriolis y  $\mathbf{d}$  a los torques gravitacionales.

Por otro lado,  $\mathbf{q}$  es el vector de coordenadas generalizadas del sistema y  $\mathbf{u}$  es el vector de control.

Reemplazando (3.20) en (3.18) y dando forma a (3.19), las ecuaciones del modelo dinámico pueden ser expresadas como:

$$u = M_{11}\ddot{r} + M_{12}\ddot{\alpha} + P_{11}\dot{r} + P_{12}\dot{\alpha}, \quad (3.22)$$

$$0 = M_{21}\ddot{r} + M_{22}\ddot{\alpha} + d_{21}. \quad (3.23)$$

Las ecuaciones (3.22) y (3.23) pueden ser expresadas en la forma de (3.21) considerando:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ \alpha \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix},$$

el modelo dinámico se termina de escribir con:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_{21} \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \frac{(M_1 + J_2)}{K_x K_A}, \\
 M_{12} &= \frac{-M_2}{K_x K_A} (\cos(\alpha)), \\
 M_{21} &= M_2 (\cos(\alpha)), \\
 M_{22} &= -J_1, \\
 P_{11} &= \frac{B_x}{K_x K_A}, \\
 P_{12} &= \frac{M_2}{K_x K_A} (\sin(\alpha)) \dot{\alpha}, \\
 d_{21} &= -M_2 g (\sin(\alpha)).
 \end{aligned}$$

### 3.6 Representación en el espacio de estados

Las ecuaciones del mecanismo descritas anteriormente puede ser representados en el espacio de estados, para ello se seleccionan las siguientes variables:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \alpha, \\
 x_2 &= \dot{\alpha}, \\
 x_3 &= r, \\
 x_4 &= \dot{r}.
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones en el espacio de estado quedarían de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-M_2 (\sin x_1) (\cos x_1) x_2^2 - B_x (\cos x_1) x_4 - (M_1 + J_2) g (\sin x_1) + K_x (\cos x_1) K_A u}{(-M_2 (\cos^2 x_1) + (M_1 + M_2) J_1) / M_2} \\ x_4 \\ \frac{-M_2^2 g (\sin x_1) (\cos x_1) - J_1 M_2 (\sin x_1) x_2^2 - J_1 B_x x_4 + J_1 K_x K_A u}{-M_2^2 (\cos^2 x_1) + (M_1 + J_2) J_1} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

El sistema cuenta con dos salidas disponibles dadas por  $x_1$  y  $x_3$  que representan la oscilación angular del péndulo y el desplazamiento del carro, respectivamente. La ecuación de salida ( $\mathbf{y}$ ) es definida como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad (3.26)$$

donde  $\mathbf{y}$  es el vector de salidas,  $\mathbf{C}$  es la matriz de salida y  $\mathbf{x}$  es el vector de estados.

Entonces  $\mathbf{C}$  toma la forma:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

### 3.7 Representación del modelo lineal

El modelo lineal del mecanismo puede ser representado en el espacio de estados como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (3.28)$$

donde  $\mathbf{x}$  es el vector de estados,  $\mathbf{A}$  es la matriz de estados,  $\mathbf{B}$  es la matriz de entrada y  $\mathbf{u}$  es el vector de entradas.

Considerando las variables  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$  descritas anteriormente y considerando las aproximaciones:  $\cos(\alpha) \cong 1$ ,  $\sin(\alpha)\dot{\alpha} \cong \dot{\alpha}\alpha \cong 0$  y  $\sin(\alpha) \cong \alpha \cong 0$ , se obtiene:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-(M_1+J_2)M_2g}{(M_1+J_2)J_1-M_2^2} & 0 & 0 & \frac{-B_x M_2}{(M_1+J_2)J_1-M_2^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-M_2^2g}{(M_1+J_2)J_1-M_2^2} & 0 & 0 & \frac{-J_1 B_x}{(M_1+J_2)J_1-M_2^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_x M_2 K_A}{(M_1+J_2)J_1-M_2^2} \\ 0 \\ \frac{J_1 K_x K_A}{(M_1+J_2)J_1-M_2^2} \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

La salida del sistema viene dada por (3.27).

### 3.8 Control proporcional integral derivativo (PID)

En la actualidad, el algoritmo de control PID es muy empleado en la industria, ya que posee un amplio campo de aplicación. Se calcula que el algoritmo PID es usado en más del 90 % de procesos industriales [33]. A continuación, la Figura 3.7 muestra el diagrama de bloques típico de un controlador PID, donde  $y$  es la salida controlada del proceso,  $u$  representa la señal de control,  $e$  es la señal de error y  $r$  es la referencia del sistema de control.

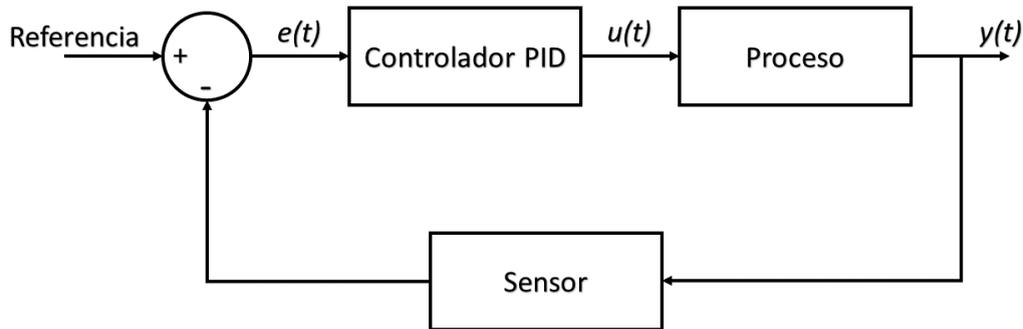


FIGURA 3.7: Diagrama en lazo cerrado del controlador PID.

Sea la ecuación matemática del proceso dada por (3.28) y (3.26), donde la ley de control del algoritmo PID ideal puede ser expresada como:

$$u = K_p \left[ e + \frac{1}{T_i} \int_0^t e \, dt + T_d \frac{de}{dt} \right], \quad (3.30)$$

donde  $K_p$  es la ganancia proporcional,  $T_i$  es la constante de tiempo integral y  $T_d$  es la constante de tiempo derivativa.

Entonces la señal de error puede ser calculada como:

$$e = r - y. \quad (3.31)$$

### 3.9 Control óptimo

El control óptimo puede ser definido como un sistema cuyo diseño se basa en la búsqueda del “mejor” sistema de control empleando una técnica óptima de diseño. Dicha técnica formula una función matemática llamada función de costo. El control óptimo trata de encontrar una solución óptima global que puede ser un mínimo o máximo, según sea el caso, de una función de costo, con la finalidad de determinar los parámetros óptimos de la ley de control [31].

Debido a posibles errores que se podrían presentar en estado permanente es necesario añadir acción integral al regulador proporcional. Estos errores pueden aparecer debido a que los parámetros del proceso no fueron estimados con exactitud. En la Figura 3.8, se puede apreciar el diagrama de bloques de un regulador proporcional con acción integral propuesto en [34], donde  $v(k)$  es la salida del integrador el cual tiene una ganancia integral asociada  $K_I$ ,  $x(k)$  es el vector de estado de dimensión  $n$ ,  $u(k)$  es el vector de control de dimensión  $m$  y  $r(k)$  es la señal de referencia. Por otro lado  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{H}$  representan a la planta y  $\mathbf{K}$  es la matriz de ganancias del controlador de dimensión  $m \times n$ .

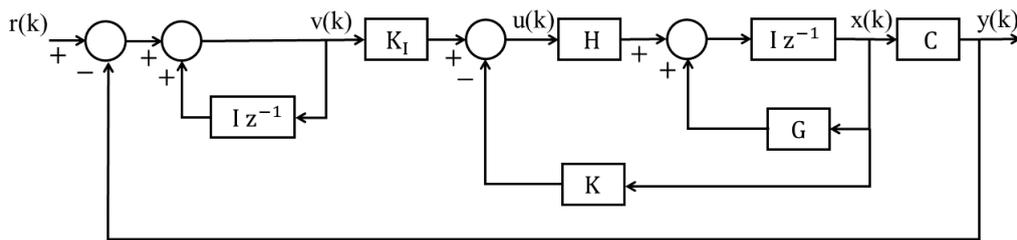


FIGURA 3.8: Diagrama de bloques del regulador proporcional integral.

Si se considera que  $r(k)$  es la señal de entrada, entonces las ecuaciones del modelo discretizado en el espacio de estado son [34]:

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k), \quad (3.32)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k), \quad (3.33)$$

y la señal de control es:

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) + K_I v(k), \quad (3.34)$$

donde la matriz de ganancia del controlador presenta la siguiente forma:

$$\mathbf{K} = [K_1 \ K_2 \ \dots \ K_n]. \quad (3.35)$$

Asimismo, la ecuación del integrador puede ser calculada como:

$$v(k) = v(k-1) + r(k) - y(k), \quad (3.36)$$

de donde se obtiene:

$$\begin{aligned} v(k+1) &= v(k) + r(k+1) - y(k+1), \\ &= v(k) + r(k+1) - \mathbf{C}[\mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)], \end{aligned} \quad (3.37)$$

reemplazando, (3.34) en (3.37) tenemos:

$$v(k+1) = (1 - \mathbf{C}\mathbf{H}K_I)v(k) + (-\mathbf{C}\mathbf{G} + \mathbf{C}\mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) + r(k+1). \quad (3.38)$$

Por otro lado, reemplazando (3.34) en (3.32), se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}[-\mathbf{K}\mathbf{x}(k) + K_I v(k)], \\ &= (\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}K_I v(k), \end{aligned} \quad (3.39)$$

y de las ecuaciones (3.38) y (3.39) y (3.33), se deduce:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{HK} & \mathbf{HK}_I \\ -\mathbf{CG} + \mathbf{CHK} & 1 - \mathbf{CHK}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(k+1), \quad (3.40)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Si se considera que la entrada  $r$  es una función escalón que desplaza el carro del mecanismo, entonces:

$$r(k) = r(k+1) = r. \quad (3.42)$$

Por lo tanto, cuando  $k$  tiende al infinito, (3.40) toma la forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{HK} & \mathbf{HK}_I \\ -\mathbf{CG} + \mathbf{CHK} & 1 - \mathbf{CHK}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

En [34], se define:

$$\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(\infty) = \mathbf{x}_e(k), \quad (3.44)$$

$$v(k) - v(\infty) = v_e(k). \quad (3.45)$$

Entonces, la ecuación del error toma la siguiente forma, para lo cual se resta la ecuación (3.43) de (3.40), después con las relaciones de (3.44) y (3.45), se tiene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k+1) \\ v_e(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K} & \mathbf{H}K_I \\ -\mathbf{C}\mathbf{G} + \mathbf{C}\mathbf{H}\mathbf{K} & 1 - \mathbf{C}\mathbf{H}K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{G} & 0 \\ -\mathbf{G}\mathbf{C} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{C}\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

En [34], la ecuación (3.46) se define como:

$$\boldsymbol{\xi}(k+1) = \tilde{\mathbf{G}}\boldsymbol{\xi}(k) + \tilde{\mathbf{H}}w(k), \quad (3.47)$$

donde:

$$w(k) = -\tilde{\mathbf{K}}\boldsymbol{\xi}(k), \quad (3.48)$$

$$\boldsymbol{\xi}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & 0 \\ -\mathbf{C}\mathbf{G} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (3.50)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{C}\mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -K_I \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

Con las relaciones obtenidas en (3.48) y (3.49), en [34] se define la siguiente función de costo:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [\boldsymbol{\xi}(k)^T \tilde{\mathbf{Q}}\boldsymbol{\xi}(k) + w^T(k) \tilde{R}w(k)], \quad (3.53)$$

donde  $\tilde{\mathbf{Q}}$  es una matriz real simétrica definida o semidefinida positiva de  $n \times n$ .

Entonces, se debe calcular una matriz  $\tilde{\mathbf{K}}$  adecuada, con la finalidad de minimizar la función de costo dada en (3.53).

Según [31], es posible formular la ecuación de ganancia del controlador  $\tilde{\mathbf{K}}$  y la ecuación de Riccati para el controlador de la siguiente manera:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{Q}} + \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{H}} [\tilde{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{H}}]^{-1} \tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{G}}, \quad (3.54)$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = [\tilde{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{H}}]^{-1} \tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{G}}, \quad (3.55)$$

donde  $\tilde{\mathbf{P}}$  es una matriz real simétrica definida o semidefinida positiva de  $n \times n$ .

### 3.10 Control adaptativo por modelo de referencia (MRAC)

Cuando se realiza el control de algún sistema, este presenta incertidumbres en sus parámetros al comienzo de la operación de control. Esas incertidumbres tienen que ser reducidas a medida que el sistema este en funcionamiento mediante un mecanismo de adaptación o estimación, de lo contrario podría ocasionar imprecisión e inestabilidad en los sistemas de control. Por otro lado, algunos sistemas pueden presentar una dinámica bien conocida al inicio de su operación, sin embargo pueden sufrir variaciones desconocidas de sus parámetros cuando el sistema de control está en funcionamiento. Es por eso, que el controlador tiene que ser rediseñado continuamente, para garantizar el control adecuado de la planta.

El control adaptativo tiene como principal objetivo, mantener el desempeño constante del sistema frente a la presencia de incertidumbre o alguna variación desconocida de los parámetros del sistema. Debido a que las incertidumbres mencionadas y el cambio de parámetros se presenta en muchos problemas de la industria, el control adaptativo es muy útil en campos como la manipulación de robots, control de aeronaves, control de procesos

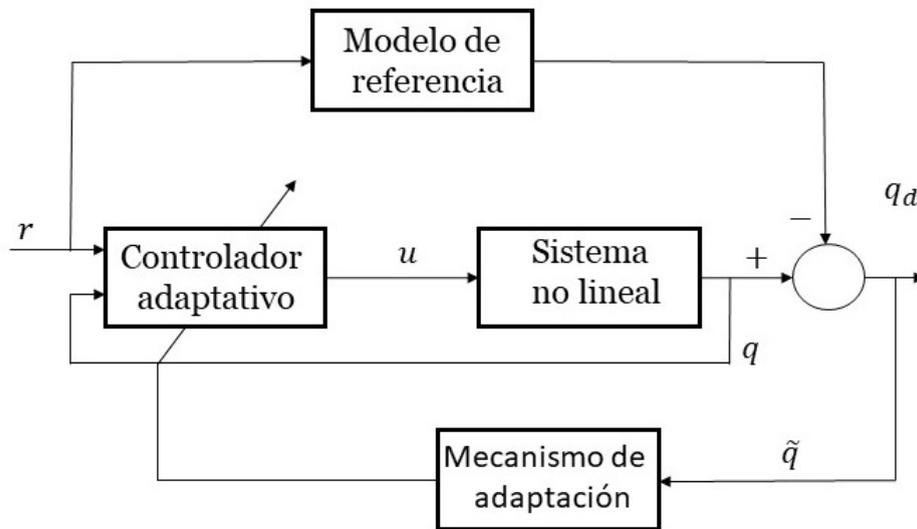


FIGURA 3.9: Sistema de control adaptativo por modelo de referencia.

y para dirigir barcos. Para ello, se debe tener en cuenta que los parámetros de la planta que están variando en el tiempo, debe ser mucho más lentos que la adaptación del parámetro [35].

Por lo descrito anteriormente, el controlador adaptativo se diferencia de un controlador ordinario en que sus parámetros son variables, y existe un mecanismo que ajuste esos parámetros mientras el sistema se encuentra en funcionamiento. Para ello, existen dos enfoques para diseñar controladores adaptativos. El primero es el método de control adaptativo por modelo de referencia (MRAC, por sus siglas en inglés), y el segundo es el método de autosintonización. Para el diseño del controlador adaptativo en este trabajo se usará el método MRAC.

El esquema de la representación de un sistema de control adaptativo por modelo de referencia se puede observar en la Figura 3.9 (Imagen basada en [35]). Se compone de cuatro partes: el sistema a controlar, un mecanismo de adaptación, un modelo de referencia y el controlador adaptativo.

El modelo de referencia, que tiene como entrada  $r$ , es un sistema dinámico que se usa para alcanzar la respuesta deseada. Esa respuesta tiene que ser alcanzada por el MRAC a pesar de la incertidumbre que se podría generar por inexactitud en el modelo del sistema dinámico de la planta y modelo del sistema de referencia.

El mecanismo de adaptación es usado para implementar la ley de adaptación, esta ley es el algoritmo de control usado para rediseñar los parámetros del controlador adaptativo, de modo que el MRAC permanezca estable y que el error de seguimiento tienda a cero a pesar de las incertidumbres y disturbios que podría presentar el sistema. Para garantizar que el mecanismo de adaptación permanezca estable se usará el método directo de Lyapunov [32].

A partir de la Figura 3.9, se puede afirmar que el objetivo del controlador MRAC es diseñar una ley de control  $\mathbf{u}$  capaz de hacer que la salida del sistema  $\mathbf{q}(t)$  siga a la referencia deseada  $\mathbf{q}_d(t)$  con velocidad suficiente a pesar de la presencia de incertidumbres. Para el diseño del MRAC se usa un modelo de referencia con matriz de transferencia unitaria es decir  $\mathbf{r} = \mathbf{q}_d$ .

### 3.10.1 Diseño del MRAC

Sea el sistema dinámico dado por (3.21), en [32] se asume que es posible transformar dicho sistema en una expresión que dependa linealmente de un vector de parámetros  $\mathbf{a}$  con elementos conocidos, es decir:

$$\mathbf{Y}\mathbf{a} = \mathbf{u}, \quad (3.56)$$

donde  $\mathbf{Y}$  es una matriz que contiene información de las variables del sistema.

Considerar la siguiente ley de control:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Y}\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{K}_D\mathbf{s}, \quad (3.57)$$

donde  $\mathbf{Y}\hat{\mathbf{a}}$  es el término anticipativo,  $\mathbf{K}_D\mathbf{s}$  es el término derivativo,  $\hat{\mathbf{a}}$  es el vector estimado de parámetros, mientras que la ganancia derivativa  $\mathbf{K}_D$  es una matriz simétrica constante definida positiva y  $\mathbf{s}$  es un vector de superficies deslizantes cuyos elementos  $s_i, i = 1, \dots, m$  se definen mediante la ecuación  $s_i(\mathbf{q}, t) = 0$ , de modo que:

$$s_i = \left(\frac{d}{dt} + \lambda_i\right)^{n-1} \tilde{q}_i = (p + \lambda_i)^{n-1} \tilde{q}_i, \quad (3.58)$$

donde  $\lambda_i > 0$  es una constante,  $p$  es el operador de Laplace y  $\tilde{q}_i = q_i - q_{di}$  es el  $i$ -ésimo error de seguimiento.

Para  $n = 2$ , (3.58) se transforma en un error de seguimiento compuesto que depende del error de seguimiento de posición  $\tilde{\mathbf{q}}$  y el error de seguimiento de velocidad  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$  de la siguiente forma:

$$\mathbf{s} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda\tilde{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r, \quad (3.59)$$

donde  $\Lambda$  es una matriz simétrica definida positiva y,

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d, \quad (3.60)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \dot{\mathbf{q}}_d - \Lambda\mathbf{q}. \quad (3.61)$$

En presencia de torques de gravedad externos  $\mathbf{d}(\mathbf{q})$ , en [35] se escribe la conservación de la energía como:

$$\dot{\mathbf{q}}^T(\mathbf{u} - \mathbf{d}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}], \quad (3.62)$$

donde  $\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}$  es la energía cinética del sistema y  $\dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{u} - \mathbf{d})$  representa a la potencia de entrada dada por el actuador.

Expandiendo el término derecho de (3.62), se obtiene:

$$\dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{u} - \mathbf{d}) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.63)$$

y usando el término  $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}$  del sistema dinámico (3.21), se obtiene:

$$\dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{P}) \dot{\mathbf{q}} = 0. \quad (3.64)$$

En [32] se establece que  $(\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{P}) = \mathbf{J}$  es antisimétrica, es decir  $\mathbf{J} = -\mathbf{J}^T$ , por lo tanto:

$$\dot{\mathbf{M}} = 2\mathbf{P} + \mathbf{J}. \quad (3.65)$$

Dada un trayectoria deseada  $\mathbf{q}_d(t)$  y con algunos parámetros del sistema desconocidos, el problema de diseño del controlador adaptativo es derivar una ley de control para los actuadores y una ley de estimación para los parámetros desconocidos, de modo que la salida del sistema  $\mathbf{q}(t)$  siga la trayectoria deseada. Para este fin, se define  $\tilde{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}$  como el error de estimación de los parámetros, donde  $\mathbf{a}$  es un vector constante que describe parámetros desconocidos de las propiedades de masa del sistema y  $\tilde{\mathbf{a}}$  es su estimación [35]. Ahora, considerar la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(t) = \frac{1}{2} [\mathbf{s}^T \mathbf{M} \mathbf{s} + \hat{\mathbf{a}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\mathbf{a}}], \quad (3.66)$$

donde  $\Gamma$  es una matriz simétrica definida positiva.

Derivando (3.66), se obtiene:

$$\dot{V}(t) = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{M}}\mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{M}}\mathbf{s} + \dot{\hat{\mathbf{a}}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\mathbf{a}}, \quad (3.67)$$

usando la relación (3.59), se tiene:

$$\dot{V}(t) = \mathbf{s}^T (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_r) + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{M}}\mathbf{s} + \dot{\hat{\mathbf{a}}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\mathbf{a}}, \quad (3.68)$$

usando la relación de que  $\mathbf{J}$  es antisimétrica dada en (3.65) para eliminar el término  $\frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{M}}\mathbf{s}$  y sustituyendo (3.65) y el término  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}$  del sistema dinámico (3.21) en la expresión anterior, se tiene:

$$\dot{V}(t) = \mathbf{s}^T (\mathbf{u} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{P}\dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{d}) + \dot{\hat{\mathbf{a}}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\mathbf{a}}. \quad (3.69)$$

En [35], se afirma que dada una definición adecuada del vector de parámetros desconocidos  $\mathbf{a}$  el cual describe las propiedades de masa del sistema, los términos  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{P}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y  $\mathbf{d}(\mathbf{q})$ , son dependientes linealmente de  $\mathbf{a}$ . Por lo tanto, se puede definir una matriz conocida  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r)$  tal que:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{P}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{d}(\mathbf{q}) = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{a}, \quad (3.70)$$

tomando la ley de control dada en (3.57), se obtiene:

$$\dot{V}(t) = \mathbf{s}^T (\mathbf{Y}\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{K}_D \mathbf{s}) + \dot{\hat{\mathbf{a}}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\mathbf{a}}, \quad (3.71)$$

la ley de adaptación de los parámetros estimados  $\hat{\mathbf{a}}$  puede ser escrita como:

$$\dot{\hat{\mathbf{a}}} = -\Gamma \mathbf{Y}^T \mathbf{s}. \quad (3.72)$$

Reemplazando (3.70) y (3.72) en (3.69), se obtiene:

$$\dot{V}(t) = -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_D \mathbf{s} \leq 0, \quad (3.73)$$

esto implica que el error de seguimiento converge en la superficie  $\mathbf{s} = 0$ , dada la definición de  $\mathbf{s}$  en (3.59) muestra que  $\tilde{\mathbf{q}}$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$  tienden a  $\mathbf{0}$  cuando  $t$  tiende a infinito. Por lo tanto, la estabilidad global del sistema y la convergencia del error de seguimiento, están garantizadas [35].

## Capítulo 4

# METODOLOGÍA

En este capítulo se presenta el diseño en 3D del mecanismo tipo grúa torre propuesto. Posteriormente, se procede a diseñar el controlador adaptativo por modelo de referencia para ser implementado en el mecanismo, el cual es un sistema subactuado.

### 4.1 Diseño en 3D del mecanismo tipo grúa torre

En esta tesis, el diseño del mecanismo tipo grúa torre propuesto posee tres grados de libertad, los cuales pueden ser visualizados en el diseño en 3D mostrado en la Figura 4.1, donde  $r$  es el desplazamiento del carro,  $\theta$  es el ángulo de giro de la pluma y  $\alpha$  es el ángulo de oscilación producido por la carga. Este sistema mecánico posee dos grados de libertad actuados ( $r, \theta$ ) y un grado de libertad subactuado ( $\alpha$ ).

Para fines de esta tesis, se consideró el grado de libertad dado por  $\theta$  como una restricción, por ello el modelo matemático desarrollado contiene a los grados de libertad  $r$  y  $\alpha$ .

Las partes que posee el diseño propuesto en 3D se visualizan en la Figura 4.2, mientras que las variables del modelo dinámico descrito en (3.22) y (3.23) pueden ser observadas en la Figura 4.3

### 4.2 Diseño del MRAC para el mecanismo tipo grúa torre

Con el modelo dinámico dado por (3.24), se procede a diseñar el controlador adaptativo por modelo de referencia. El vector de entrada está dado por  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u & 0 \end{bmatrix}^T$  y el

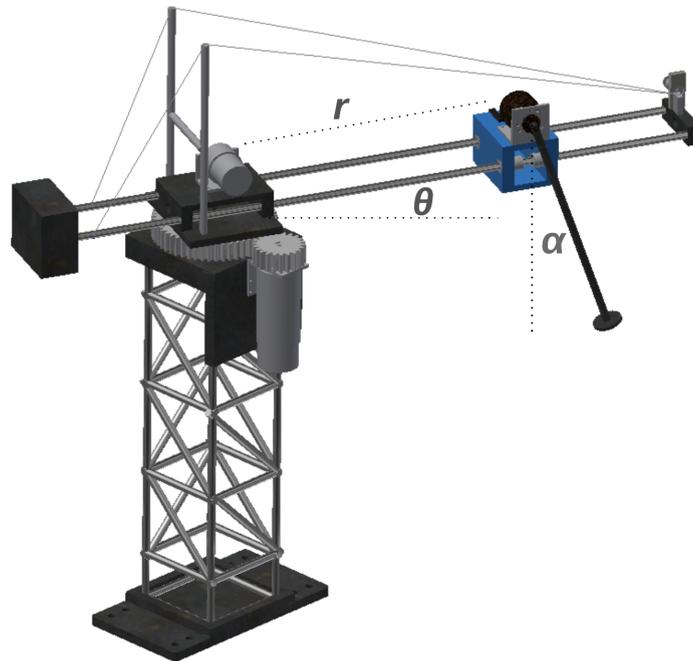


FIGURA 4.1: Diseño en 3D del mecanismo tipo grúa torre.

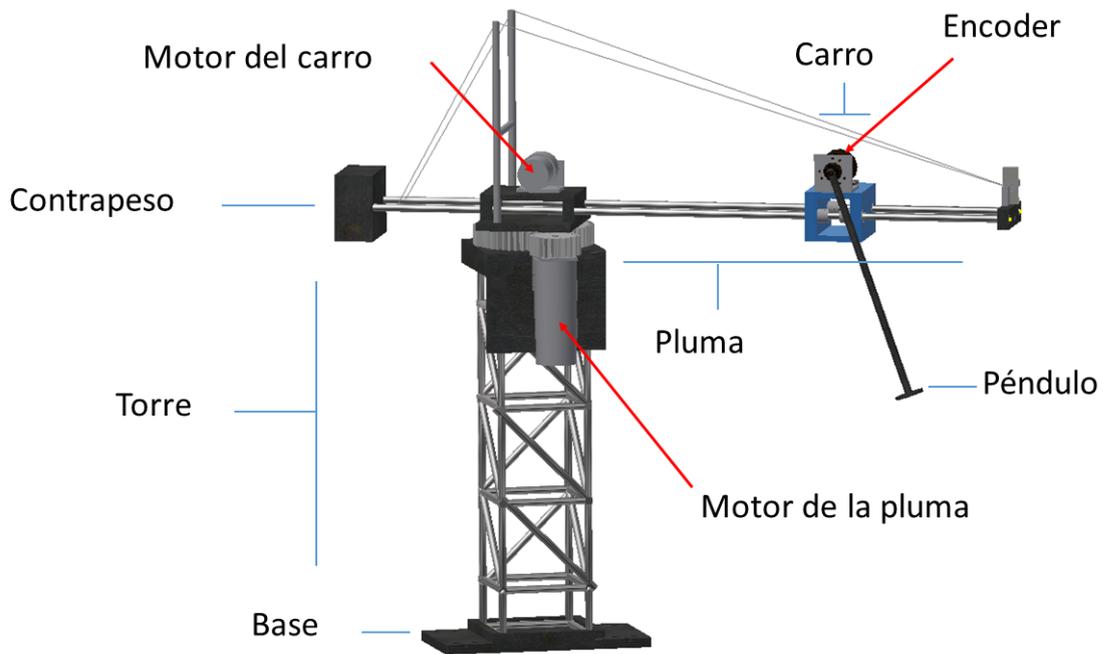


FIGURA 4.2: Partes del diseño del mecanismo tipo grúa torre.

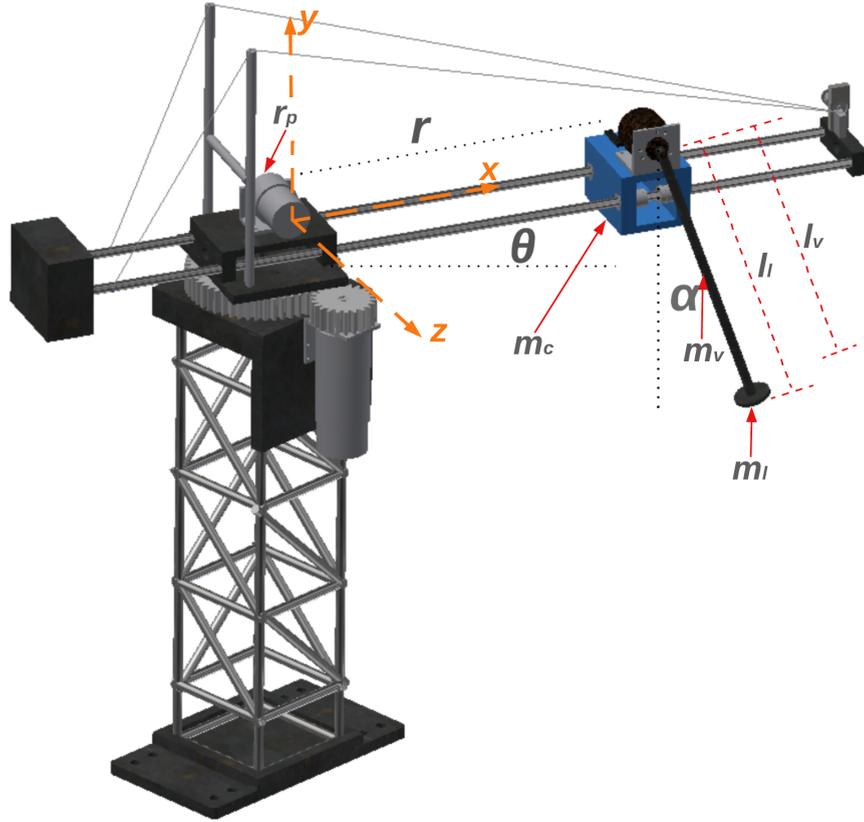


FIGURA 4.3: Identificación de variables del modelo en el diseño en 3D.

vector de coordenadas generalizadas por  $\mathbf{q} = [r \ \alpha]^T$ . Dado que la dimensión de  $\mathbf{u}$  es diferente a la dimensión de  $\mathbf{q}$ , se puede afirmar que el sistema a controlar es subactuado, con dos salidas controladas, pero con solo una señal de control.

En [36], se plantea que debido a la naturaleza subactuada del mecanismo tipo grúa torre usado en esta tesis, el procedimiento desarrollado en el capítulo anterior requiere de algunas modificaciones. Primero, el vector  $\mathbf{q}$  se divide en  $\mathbf{q} = [q_a \ q_s]^T = [r \ \alpha]^T$ , donde  $q_a$  representa al estado actuado y  $q_s$  al estado subactuado. Segundo, el error de seguimiento dado por (3.60) se divide en  $\tilde{\mathbf{q}}_a = \mathbf{q}_a - \mathbf{q}_{ad}$  y  $\tilde{\mathbf{q}}_s = \mathbf{q}_s - \mathbf{q}_{sd}$ . Luego, la superficie deslizante es definida mediante la combinación lineal dada por los errores de

posición y velocidad [36], es decir (3.59) se convierte en:

$$\mathbf{s} = \tilde{\mathbf{q}}_a + \Lambda \tilde{\mathbf{q}}_a + \Phi \tilde{\mathbf{q}}_s, \quad (4.1)$$

donde  $\Lambda$  y  $\Phi$  son matrices simétricas definidas positivas.

Por otro lado, para fines de parametrización lineal y considerando  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} r & \alpha \end{bmatrix}^T$ , el modelo dinámico (3.24) toma la forma dada en (3.70):

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_r + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_r + \begin{bmatrix} 0 \\ d_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Este sistema puede ser parametrizado definiendo:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(M_1 + J_2)}{K_x K_A}, \\ a_2 &= \frac{-M_2}{K_x K_A}, \\ a_3 &= M_2, \\ a_4 &= -J_1, \\ a_5 &= \frac{B_x}{K_x K_A}, \end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned} M_{11} &= a_1, \\ M_{12} &= a_2 \cos q_2, \\ M_{21} &= a_3 \cos q_2, \\ M_{22} &= a_4, \\ P_{11} &= a_5, \end{aligned}$$

$$P_{12} = -a_2 \sin q_2 \dot{q}_2,$$

$$d_{12} = -a_3 g \sin q_2.$$

Por lo tanto, la propiedad de parametrización lineal dada en (3.70) puede ser escrita como:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}_r) \hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_{r1} & \cos q_2 \ddot{q}_{r2} - \dot{q}_2 \sin q_2 \dot{q}_{r2} & 0 & 0 & \dot{q}_{r1} \\ 0 & 0 & \cos q_2 \ddot{q}_{r1} - g \sin q_2 & \ddot{q}_{r2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \end{bmatrix}$$

donde el vector de parámetros estimados  $\hat{\mathbf{a}}$  se calcula integrando la ley de adaptación dada en (3.72) y el vector de deslizamiento  $\mathbf{s}$  se calcula usando (4.1).

## Capítulo 5

### RESULTADOS

En este capítulo se presenta la construcción del mecanismo tipo grúa torre, además de la implementación de los controladores diseñados los cuales son PID, LQR y MRAC. Asimismo, se muestra la comparación de las respuesta entre los controladores. Posteriormente, se analiza el desempeño de los controladores implementados.

#### 5.1 Diseño y construcción del mecanismo tipo grúa torre

Con el diseño mostrado en la Figura 4.1, se procedió a la fabricación de la estructura usando el material acero H1045. En cuanto a la parte electrónica, se seleccionó un motor DC de la firma Pololu, el cual se puede ver en la Figura 5.1 (Imagen tomada de [37]), este motor transmite movimiento al carro mediante una polea conectada al eje del motor y una faja que rodea la polea. Este motor cuenta con una caja de engranajes con relación 18.75:1 y posee un encoder de cuadratura con 1200 cuentas por revolución. La alimentación es de 12 voltios (v), además puede llegar a proporcionar 540 revoluciones por minuto (rpm) sin carga a 150 mA.

Por otro lado, para darle movimiento a la pluma, se obtuvo un motor DC de la firma Lynxmotion, que puede ser visualizado en la Figura 5.2 (Imagen tomada de [38]), la principal característica que se buscó en este motor fue el torque, debido a que esta sujeta a la pluma del mecanismo tipo grúa torre. Este motor cuenta con una caja de engranajes con relación 26.9:1. Este componente también requiere ser alimentado con 12 v, además en su máxima eficiencia proporciona un torque de 7137 g-cm y 90 rpm.



FIGURA 5.1: Motor DC usado para el movimiento del carro.



FIGURA 5.2: Motor DC usado para el movimiento de la pluma.

Para que el motor elegido sea capaz de transmitir movimiento a la pluma, fue conectado a una transmisión reductora (ver Figura 5.3). Para esta configuración se cumple:

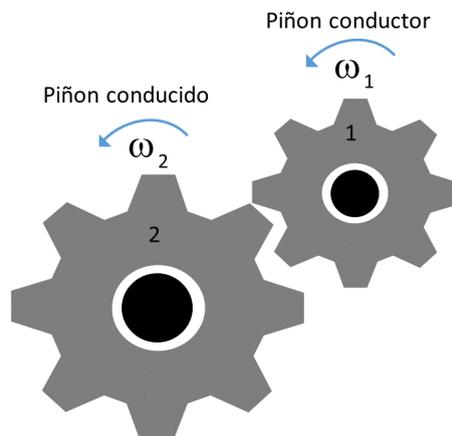


FIGURA 5.3: Transmisión reductora usada para el movimiento de la pluma.

si  $r_t = \omega_2/\omega_1$ , donde  $\omega$  es la velocidad angular, con  $r_t < 1$ , donde la velocidad de giro del eje del piñon conducido es menor que la velocidad de giro de la entrada y al mantenerse constante el producto de torque por velocidad de giro ( $T_1\omega_1 = T_2\omega_2$ ), donde  $T$  representa al torque, se consigue un torque de transmisión mayor ( $T_2 > T_1$ ). De esta manera, el eje del motor fue conectado al piñon conductor y la pluma fue montada sobre el eje del piñon conducido así, se garantiza el movimiento adecuado de la pluma según el requerimiento inicial. Las características de los piñones que fueron usados se muestran en la Tabla 5.1.

TABLA 5.1: Características de la transmisión reductora.

Descripción	Piñon conductor	Piñon conducido	Unidad
Número de dientes	22	54	-
Módulo	2.250	2.250	mm
Ancho de cara	20	20	mm
Distancia al centro	85.671		mm

La lectura del ángulo generado por la oscilación del péndulo fue realizado mediante un encoder de cuadratura que posee 2400 cuentas por revolución. El encoder usado puede ser alimentado con 5-24 v. Este dispositivo fue montado sobre el carro, y el péndulo fue acoplado al eje del encoder, de modo que ambos se muevan juntos con el carro.

El dispositivo encargado de manejar los motores del mecanismo grúa torre es un puente H de la firma Drok, que puede ser visualizado en la Figura 5.4 (Imagen tomada de [39]). El puente H elegido es capaz de manejar hasta dos motores con una salida nominal por puerto de 7 A, lo cual es suficiente en cuanto a consumo de corriente de los motores que han sido seleccionados. Finalmente, la tarjeta encargada del control del mecanismo tipo grúa torre fue la Raspberry Pi 3B+, mediante sus puertos de entrada / salida de propósito general (GPIO, por sus siglas en inglés), las cuales fueron programadas mediante el lenguaje Python.

Las dimensiones del diseño realizado pueden ser apreciadas en la Figura 5.5, mientras que el mecanismo tipo grúa torre construido es mostrado en la Figura 5.6.

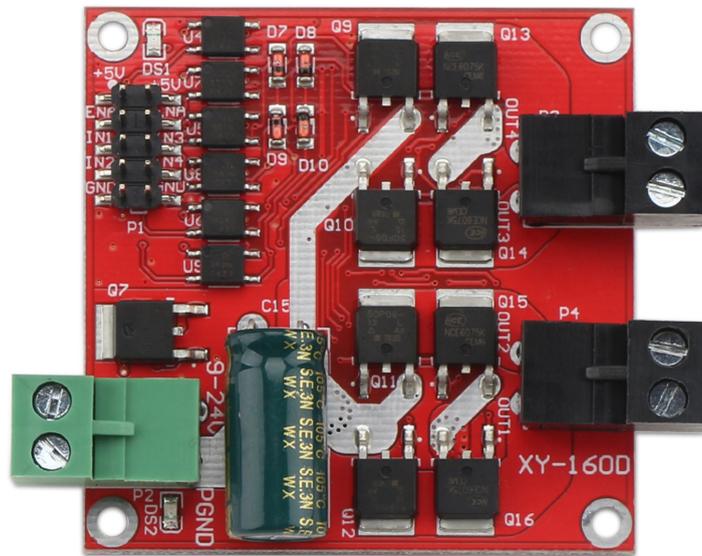


FIGURA 5.4: Puente H usado en el mecanismo tipo grúa torre.

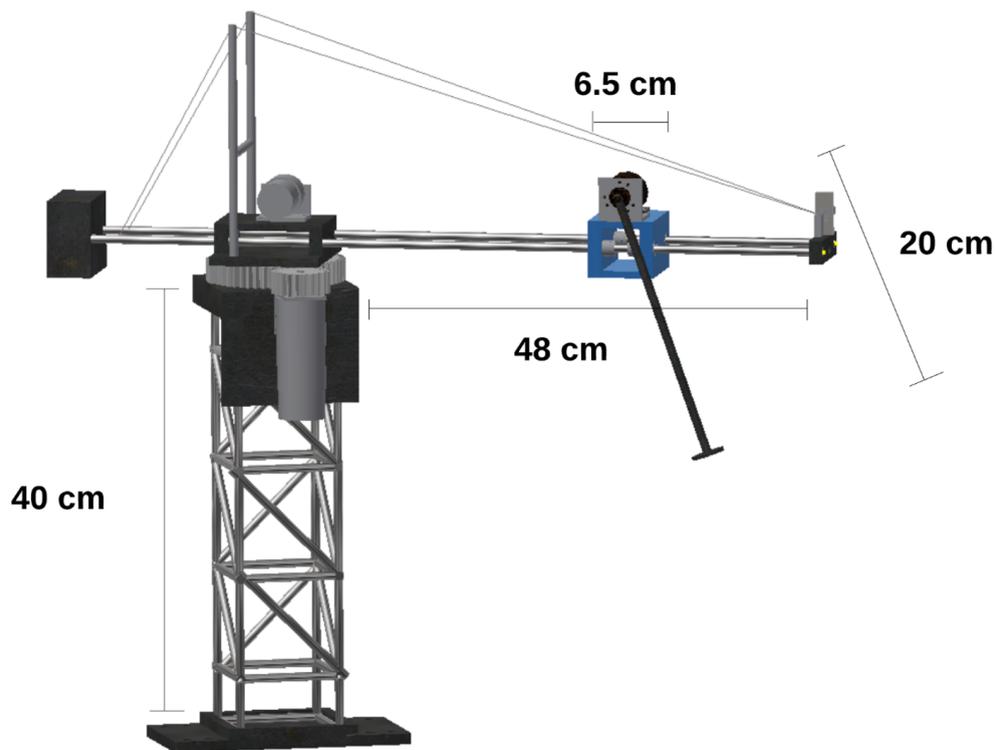


FIGURA 5.5: Dimensiones del mecanismo tipo grúa torre.

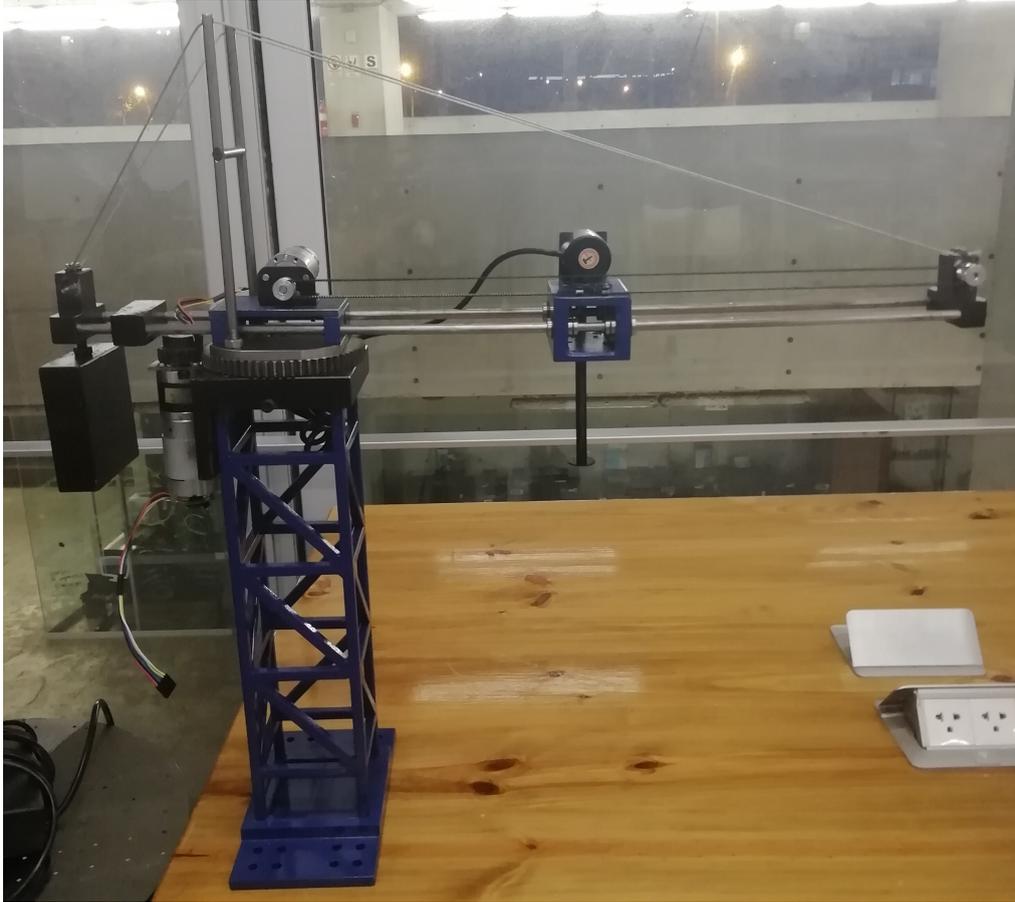


FIGURA 5.6: Mecanismo tipo grúa torre de tres grados de libertad construido.

El valor de las variables del modelo matemático del mecanismo tipo grúa construido torre son completados en la Tabla 5.2:

## 5.2 Sistema en lazo abierto

Con la finalidad de observar las oscilaciones generadas por el péndulo cuando el sistema se encuentra en lazo abierto, se inició realizando una prueba en esta configuración del mecanismo tipo grúa torre. Para ello fue necesaria la lectura del encoder que mide la oscilación generada por el péndulo. Después, se realizó una rutina que fue ejecutada en la

TABLA 5.2: Parámetros del modelo grúa torre.

Símbolo	Descripción	Valor	Unidad
$r$	posición del carro		
$\alpha$	posición angular de la varilla		
$\theta$	posición angular de la pluma		
$F$	fuerza aplicada al carro		
$u$	señal de control		
$g$	gravedad	9.81	m/s <sup>2</sup>
$K_m$	constante de torque del motor	0.156914	N-m/A
$R_a$	resistencia de armadura del motor	2.2	$\Omega$
$n$	factor de reducción del motor	18.75	
$r_p$	radio de la polea	0.008	m
$K_A$	ganancia del amplificador	1.2	
$B_m$	fricción viscosa del eje primario	0.016136813	N-m/rad/s
$B_o$	fricción viscosa del eje secundario	no se usó	
$B_{eq}$	fricción viscosa equivalente	$B_m + n^2 B_o$	
$K_b$	constante electromotriz	0.212207	V/rad
$K_m$	constante de torque del motor	0.156914	N-m/A
$m_c$	masa del carro	1.032	kg
$m_l$	masa de la carga	variable	kg
$m_v$	masa de la varilla	0.113	kg
$l_l$	longitud del centro del carro a la carga	variable	m
$l_v$	longitud la varilla	0.20	m
$J_m$	momento de inercia del eje primario del motor	$0.212 \times 10^{-6}$	kg-m <sup>2</sup>
$J_o$	momento de inercia del eje secundario del motor	no se usó	
$J_p$	momento de inercia de la polea	$m_p r_p^2 / 2$	
$J_l$	momento de inercia de la carga	$m_l l_l^2$	
$J_v$	momento de inercia de la varilla	$m_v l_v / 3$	
$J_{eq}$	momento de inercia equivalente	$J_m + n^2 (J_o + J_p)$	

tarjeta Raspberry Pi 3B+. Las oscilaciones generadas por el péndulo se pueden observar en la Figura 5.7.

### 5.3 Implementación del controlador PID

Con el modelo no lineal obtenido en el Capítulo 3, se procedió al diseño del controlador PID. Las ganancias calculadas y sintonizadas para el controlador PID son:  $K_p =$

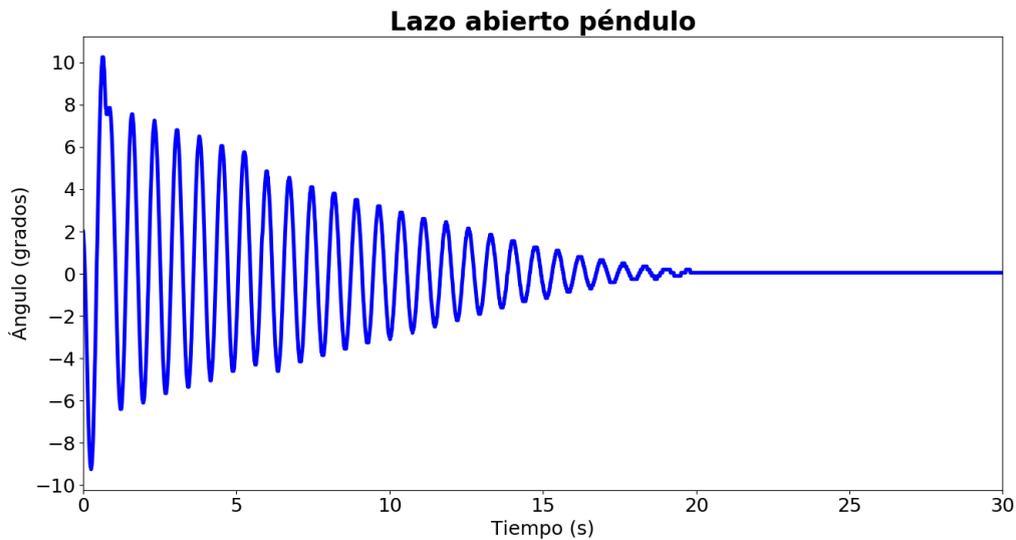


FIGURA 5.7: Implementación del lazo abierto: ángulo del péndulo  $\alpha$ .

5.6,  $T_i = 1.15$ ,  $T_d = 4.9$ . Con las ganancias obtenidas, se procedió a la implementación del controlador PID en el mecanismo tipo grúa torre construido.

En la Figura 5.8 se observa la respuesta de la posición del carro ( $r$ ). La referencia usada para la implementación es de 0.20 metros. Por otro lado, la Figura 5.9 muestra la respuesta de la posición angular del péndulo en grados sexagesimales, bajo la acción del controlador PID, que trata de mantener la oscilación siempre en cero grados. La señal de control obtenida para la implementación del controlador PID, puede ser observada en la Figura 5.10, como se puede apreciar el voltaje máximo es de 11 v debido a la fuente de alimentación del puente H. Esta consideración también fue usada en la implementación del código hecho en Python, mediante el desarrollo de un saturador.

#### 5.4 Implementación del controlador LQR

El procedimiento seguido para el diseño de este controlador es el que fue descrito en el Capítulo 3. Para tal fin, se usó el modelo en espacio de estados linealizado obtenido

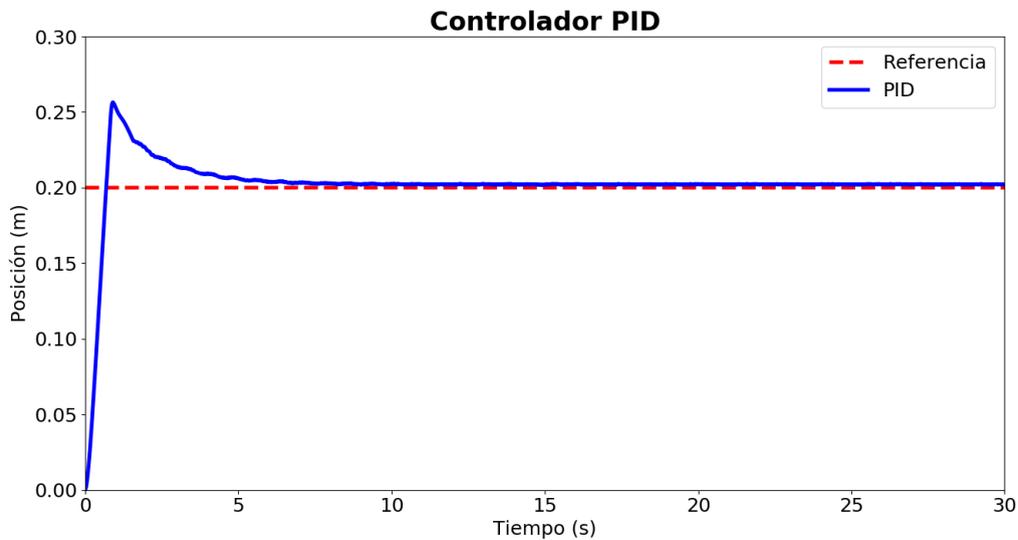


FIGURA 5.8: Implementación del PID: posición del carro  $r$ .

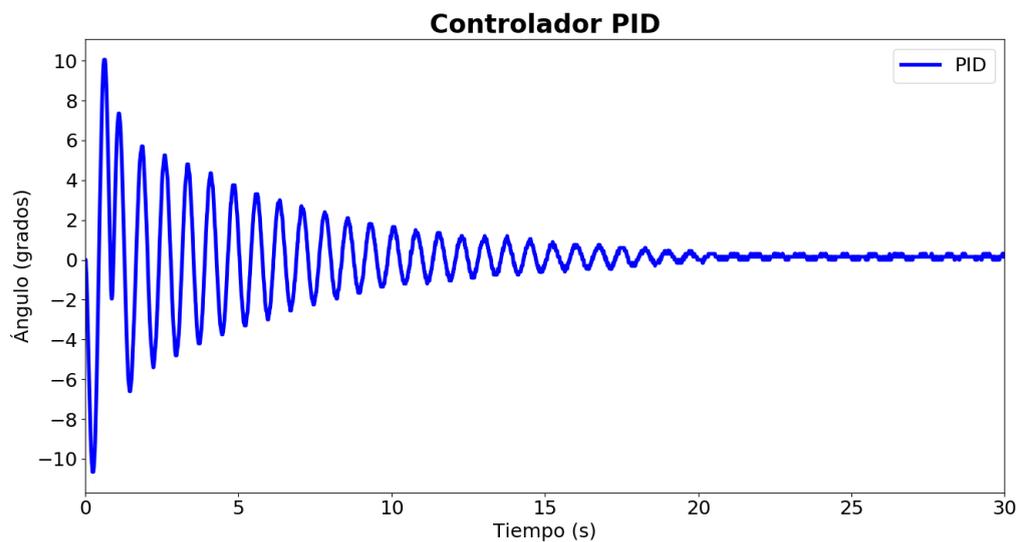


FIGURA 5.9: Implementación del PID: posición angular del péndulo  $\alpha$ .

en (3.29). Posteriormente, el procedimiento seguido fue el mismo que con el controlador PID, el diseño del controlador se realizó mediante el software Matlab. Luego, se procedió a la implementación del controlador diseñado en el mecanismo tipo grúa torre, para lo cual fue necesario el ajuste de las ganancias del controlador diseñado.

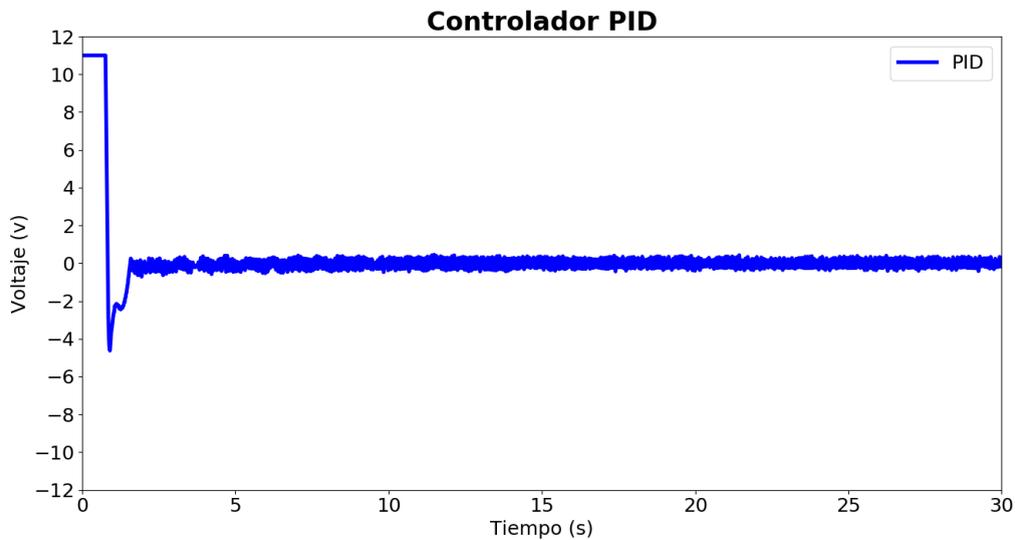


FIGURA 5.10: Implementación del PID: señal de control  $v$ .

Las ganancias finales y con las que se muestran a continuación los resultados son  $K = [133.0805, 0.6383, 20.5232, 3.9046]$  y  $K_I = 0.2175$ . La Figura 5.11 muestra la respuesta del carro, la referencia usada es de 0.20 m, la cual fue la misma que con el controlador PID. La respuesta del péndulo es mostrado en la Figura 5.12. La señal de control de la implementación del control LQR, puede ser apreciada en la Figura 5.13.

## 5.5 Implementación del controlador MRAC

La implementación del controlador MRAC usa el modelo no lineal del sistema obtenido en el Capítulo 3. De la misma manera que los controladores anteriores, primero se diseño el controlador con el software Matlab para obtener las ganancias adecuadas. Después de ello, se procedió a la implementación y a la sintonización de las ganancias.

Las ganancias usadas para la implementación fueron  $\Lambda = 0.8$ ,  $\Gamma = 0.05$ ,  $\Phi = 8$  y  $K_d = 8.8$ . La Figura 5.14 muestra la respuesta de la implementación del carro con

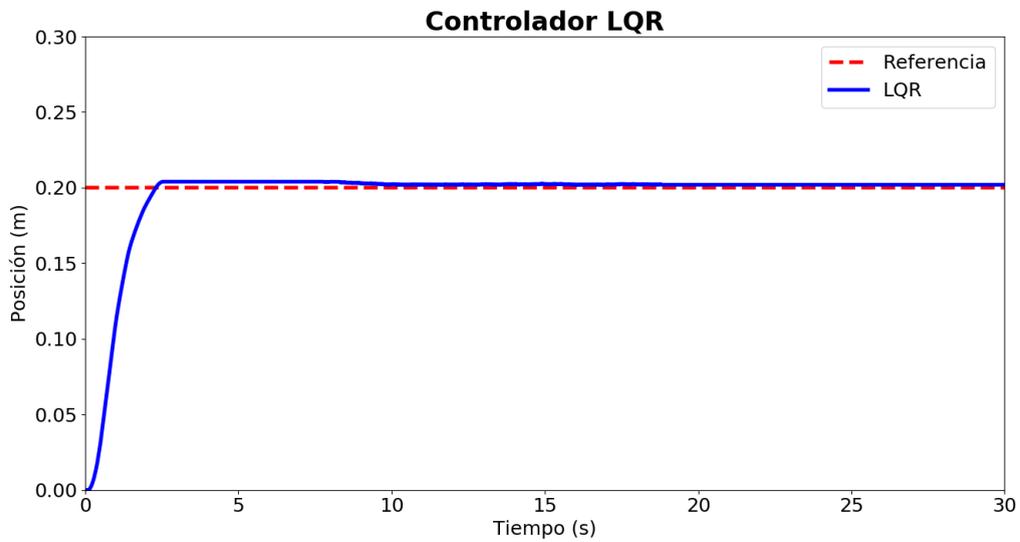


FIGURA 5.11: Implementación del controlador LQR: posición del carro  $r$ .

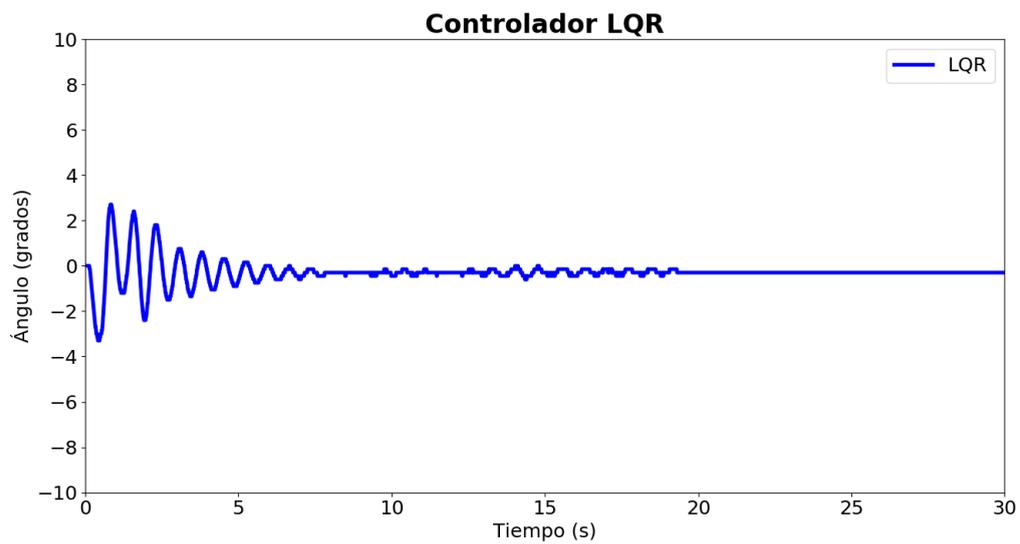


FIGURA 5.12: Implementación del controlador LQR: posición angular del péndulo  $\alpha$ .

el controlador MRAC, mientras que la respuesta del péndulo puede ser apreciada en la Figura 5.15. Por otro lado, la Figura 5.16 muestra la señal de control.

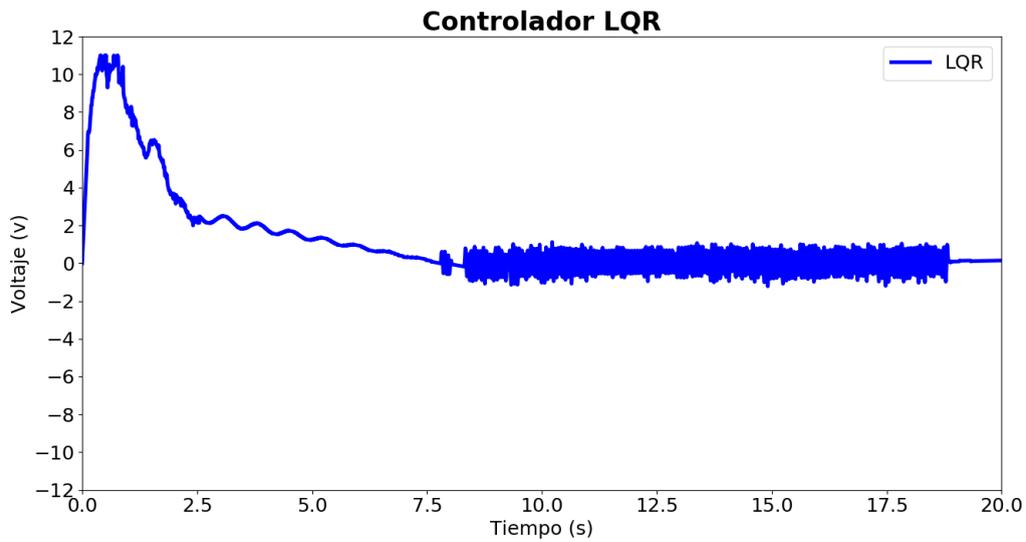


FIGURA 5.13: Implementación del controlador LQR: señal de control  $v$ .

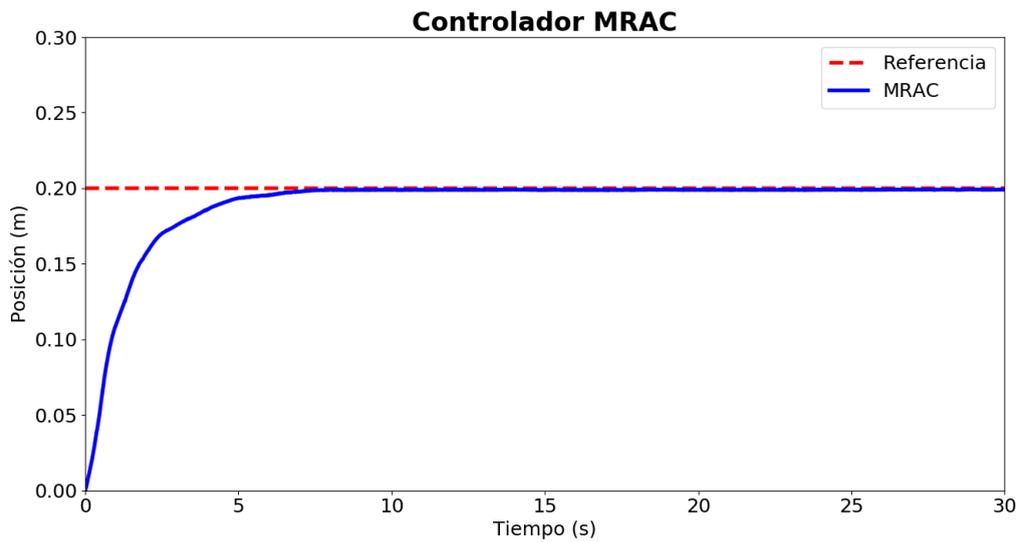


FIGURA 5.14: Implementación del controlador MRAC: posición del carro  $r$ .

## 5.6 Comparación de los controladores

A continuación, se evaluará el desempeño presentado por los controladores diseñados. La Figura 5.17 muestra el posicionamiento del carro para una referencia de

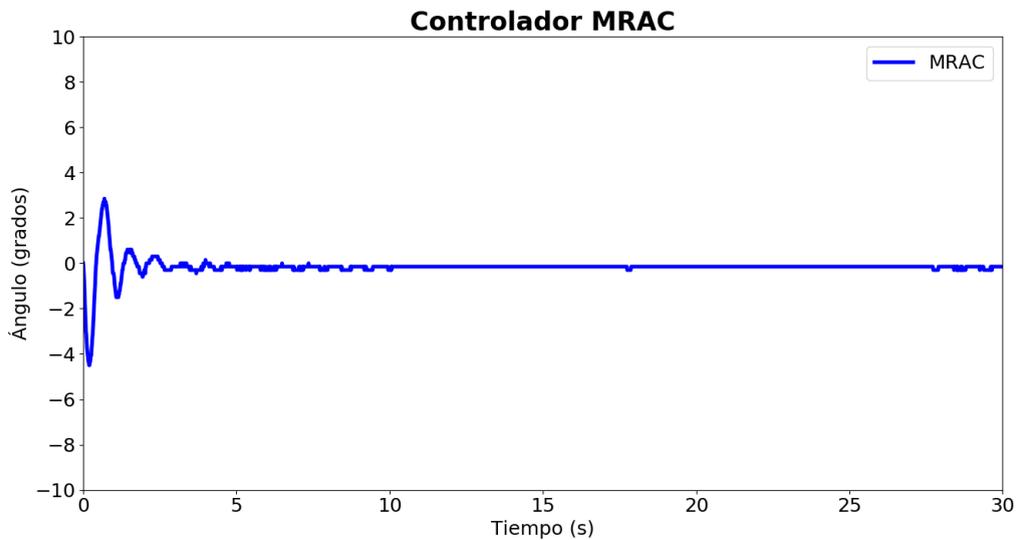


FIGURA 5.15: Implementación del controlador MRAC: posición angular del péndulo  $\alpha$ .

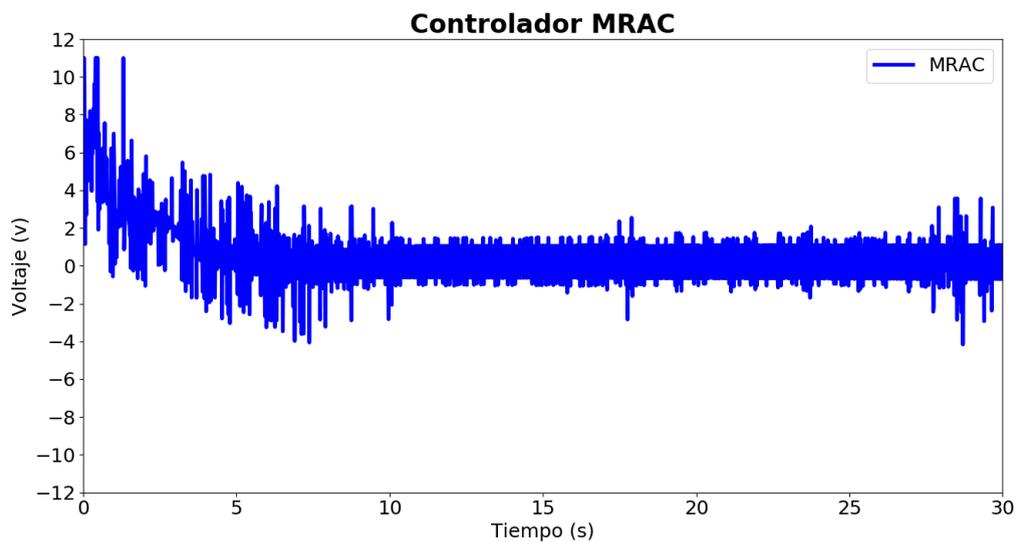


FIGURA 5.16: Implementación del controlador MRAC: señal de control  $v$ .

0.20 m y la Tabla 5.3 muestra las características de las respuestas obtenidas con cada controlador. Como se puede apreciar en la Figura 5.17, el LQR es el controlador que más rápido se posiciona frente al PID y el MRAC, sin embargo, el carro presenta una pequeña oscilación cuando ingresa a su estado estacionario lo cual puede perjudicar al péndulo.

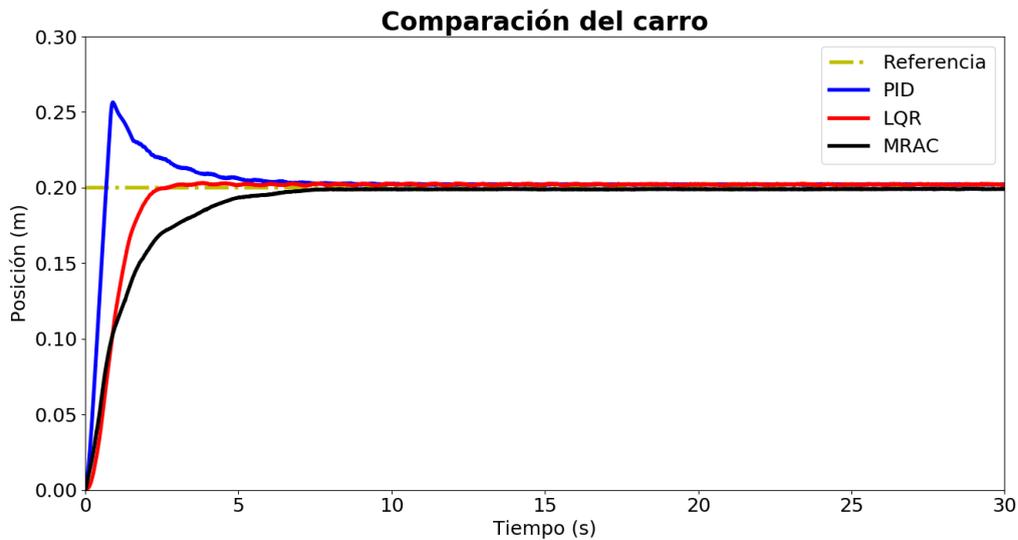


FIGURA 5.17: Posición del carro para  $r = 0.2$ .

Por otro lado, se puede afirmar que solo el PID presenta porcentaje de sobreimpulso igual a 26.8, ya que el porcentaje de sobreimpulso dado por el LQR es menor a 1, mientras que el MRAC tiene porcentaje de sobreimpulso nulo. En cuanto al error en estado estacionario, los tres controladores diseñados alcanzan el valor de la referencia, es decir tienen error en estado estacionario nulo.

TABLA 5.3: Comparación del posicionamiento del carro.

Característica	PID	LQR	MRAC
Tiempo de establecimiento (s)	6	2.25	7
Porcentaje de sobreimpulso (%)	26.85	0.9	0
Error en estado estacionario (%)	-	-	-

En cuanto al comportamiento del ángulo de oscilación, la Figura 5.18, muestra los datos de oscilación del péndulo de los controladores diseñados y la Tabla 5.4 presenta los datos numéricos de la comparación. Como se puede apreciar, el controlador PID es el que genera la mayor amplitud de oscilación cuando el carro comienza a moverse, mientras que el controlador LQR genera 3.39 grados, lo cual es menor al generado por el MRAC

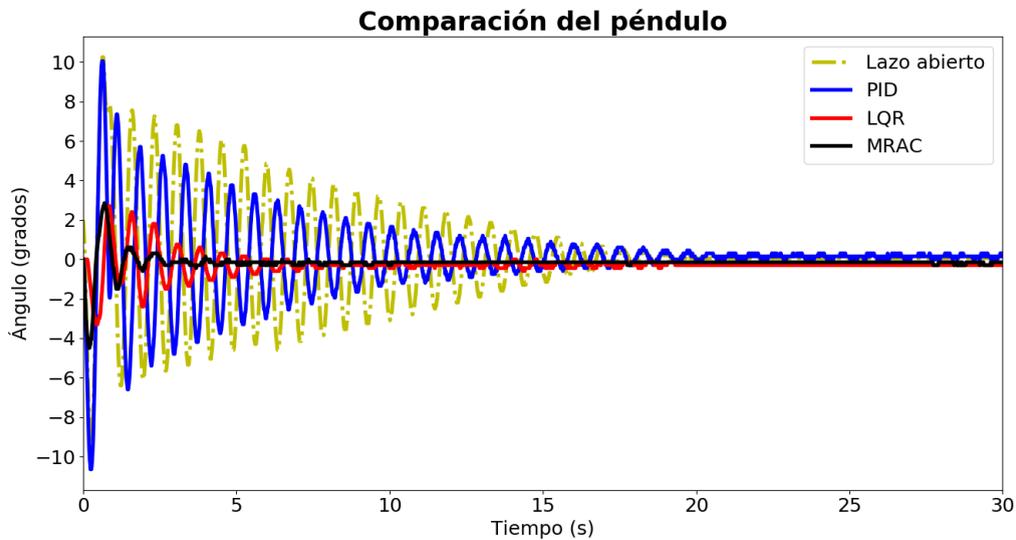


FIGURA 5.18: Ángulo de oscilación del péndulo.

TABLA 5.4: Comparación del ángulo de oscilación del péndulo.

Característica	PID	LQR	MRAC
Pico más alto de la respuesta temporal (°)	10.71	3.39	4.53
Porcentaje de reducción del pico más alto (%)	5	18.29	35.32
Tiempo de establecimiento (s)	20.6	7.9	4.86

que es de 4.53 grados. Sin embargo, a medida que transcurre el tiempo, el MRAC es el controlador que mejor desempeño muestra al reducir en 86.09 % la amplitud del quinto pico de oscilación, mientras que el LQR solo lo reduce en 28.61 %, demostrando así su superioridad en cuanto a la reducción de la amplitud de oscilación del péndulo. Esto se confirma con el tiempo de establecimiento del MRAC que es de 4.86 segundos frente a los 7.9 segundos del LQR. Con ello, se demuestra que el controlador MRAC diseñado cumple satisfactoriamente la disminución de las oscilaciones en el mecanismo tipo grúa torre.

La implementación de los controladores hecha anteriormente, imita al posicionamiento de la carga en una grúa torre real, pero es conocido que cuando las grúas están en movimiento están sujetas a perturbaciones del ambiente que afectan directamente a

la oscilación de la carga. Para comprobar el desempeño de los controladores diseñados frente a una perturbación, se hizo una prueba con perturbación de los controladores LQR y MRAC el cual es mostrado en la Figura 5.19 y en la Tabla 5.5. La data obtenida en

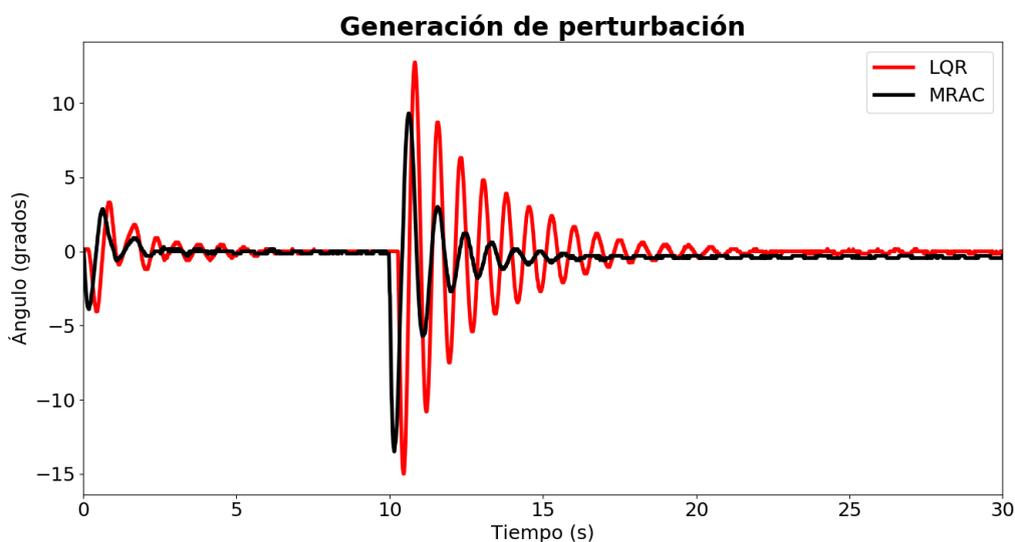


FIGURA 5.19: Reacción a la perturbación.

TABLA 5.5: Oscilación frente a una perturbación.

Característica	LQR	MRAC
Pico más alto de la perturbación (°)	15.06	13.61
Porcentaje de reducción del pico más alto (%)	49.4	79.72

la prueba anterior, demuestra que el MRAC es superior al LQR en cuanto al control del péndulo de la grúa frente a perturbaciones externas al sistema. Como se puede apreciar, el controlador MRAC pudo reducir hasta en 79.72 % al quinto pico de oscilación, mientras que el LQR para este mismo pico solo logro una reducción de 49.89 %. La superioridad mostrada por el MRAC en esta prueba, comprueba la teoría del controlador MRAC, la cual tiene como objetivo principal mantener el desempeño constante del sistema frente a variaciones de algún parámetro del sistema o incertidumbres, lo cual es logrado mediante el rediseño de los parámetros con el que cuenta el controlador adaptativo en su esquema.

Por esta razón, fue escogida con el fin de reducir las oscilaciones producidas por la carga en el mecanismo tipo grúa torre. Si bien el MRAC demostró mejor desempeño que el controlador LQR, cabe mencionar que los recursos computacionales empleados, como la memoria, por el algoritmo LQR es mucho menor, ya que las ganancias que usa son únicas e invariables, mientras que el MRAC está variando constantemente sus ganancias de acuerdo al comportamiento del sistema, lo cual aumenta su costo computacional debido al cálculo constante que está realizando.

## CONCLUSIONES

En este trabajo, se logró implementar experimentalmente las metodologías de control PID, LQR y MRAC sobre un mecanismo tipo grúa torre con la finalidad de comparar el desempeño de cada controlador en el posicionamiento preciso del carro y la disminución de oscilación producida en la carga durante el transporte.

En ese sentido, para el mecanismo tipo grúa torre construido, se demostró que el controlador adaptativo por modelo de referencia (MRAC) muestra un mejor desempeño frente a controladores como PID y LQR, en el control de oscilación producida por la carga en un mecanismo tipo grúa torre. Logrando, un tiempo de disminución de oscilación de 4.86 segundos y reduciendo hasta en un 79.72 % al quinto pico de amplitud generado por una perturbación desconocida en el sistema.

Por otro lado, el controlador MRAC también mostró un buen desempeño en cuanto al posicionamiento del carro, dado que no presentó sobreimpulso ni oscilaciones y el error en estado estacionario fue nulo. Por su lado, el controlador LQR presentó un sobreimpulso de 0.9 %, mientras que el controlador PID presentó sobreimpulso de 26.85 %, por lo que se puede concluir la superioridad del MRAC en ese aspecto. En cuanto al tiempo de establecimiento, el LQR mostró superioridad con un tiempo de 2.25 segundos frente a los 6 y 7 segundos del PID y MRAC, respectivamente.

Como se mencionó anteriormente, la señal de control tenía implementada un saturador de 11v en los algoritmos de control, en ese sentido todos los controladores mostraron picos de 11v en la señal de control durante la implementación. Sin embargo, en el estado estacionario se puede apreciar que el LQR y MRAC usan aproximadamente 1v para mantener la posición del carro mientras que el PID usa alrededor de 0.5v.

Con las características obtenidas por el MRAC, se concluye que el posicionamiento deseado del carro y la disminución de las oscilaciones producidas por la carga en un

mecanismo tipo grúa torre fueron cubiertas satisfactoriamente. La superioridad mostrada por el MRAC radica en la naturaleza del controlador, el cual consiste en rediseñar las ganancias mediante el mecanismo de adaptación, en la presencia de incertidumbre o la variación de algún parámetro desconocido. Algunas consideraciones a tener en cuenta son que el MRAC usa el modelo no lineal de la planta lo que lleva a la implementación de una ley de control no lineal lo cual puede resultar complicado dependiendo del sistema donde será implementado dado que requiere el uso de funciones matemáticas no lineales. Por otro lado, puede resultar difícil determinar la ley de adaptación.

Finalmente, el mecanismo tipo grúa torre construido queda listo para la implementación de cualquier tipo de controlador mediante el lenguaje Python, de esta manera puede ser usado para el estudio de diversos controladores y el desempeño de cada uno de ellos en el control de grúas.

## TRABAJO FUTURO

Como continuación de esta tesis y trabajo futuro, se puede desarrollar lo siguiente:

- Implementar los controladores desarrollados en este trabajo considerando el grado de libertad dado por el ángulo de giro de la pluma ( $\theta$ ), que en esta tesis fue usado como una restricción.
- Diseñar e implementar otros controladores en el mecanismo tipo grúa construido con la finalidad de evaluar su desempeño en sistemas subactuados como una grúa torre.
- Realizar una interfaz gráfica que permita el estudio de diversos controladores en el mecanismo tipo grúa torre de modo que sea usado como un banco de pruebas en cursos relacionados a la ingeniería de control.
- Hacer pruebas con diferentes referencias en simultáneo para el posicionamiento del carro de tal manera que se pueda evaluar su comportamiento.
- Llevar a cabo experimentos agregando diversas cargas al péndulo, con la finalidad de verificar la robustez del controlador MRAC implementado.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] P. Comesaña, *Montaje e Instalación de Grúas*. Ideas Propias Editorial, 1900.
- [2] Z. Masoud, A. Nayfeh, and A. Al-Mousa, “Delayed position-feedback controller for the reduction of payload pendulations of rotary cranes,” *Journal of Vibration and Control*, vol. 9, no. 1, pp. 257–277, jan 2003.
- [3] M. Tinkir, U. Önen, M. Kalyoncu, and Y. Şah, “Modeling and control of scaled a tower crane system,” in *Proc. 3rd Int. Conf. Computer Research and Development*, vol. 4, Mar. 2011, pp. 93–98.
- [4] J. P. Ortiz, L. I. Minchala, and M. J. Reinoso, “Nonlinear robust h-infinity PID controller for the multivariable system quadrotor,” *IEEE Latin America Transactions*, vol. 14, no. 3, pp. 1176–1183, Mar. 2016.
- [5] M. M. Tumari, M. Saealal, Y. A. Wahab, and M. Ghazali, “H-infinity controller with LMI region schemes for a lab-scale rotary pendulum crane system,” *International Journal of Signal System Control and Engineering Application*, vol. 5, no. 1, pp. 14–20, jan 2012.
- [6] T. Bariša, M. Bartulović, G. Žužić, S. Ileš, J. Matuško, and F. Kolonić, “Nonlinear predictive control of a tower crane using reference shaping approach,” in *Proc. 16th Int. Power Electronics and Motion Control Conf. and Exposition*, Sep. 2014, pp. 872–876.

- [7] H. Chen, Y. Fang, and N. Sun, "A tower crane tracking control method with swing suppression," in *Proc. Chinese Automation Congress (CAC)*, Oct. 2017, pp. 3609–3614.
- [8] Y. Yu, "Forensic investigation on crane accidents," *International Journal of Forensic Engineering*, vol. 3, p. 319, 01 2017.
- [9] WorkSafeBC, "Recent work-related incidents reported to worksafebc," 2022. [Online]. Available: <https://www.worksafebcmedia.com/enews/nis/220329/220329.html>
- [10] A. Weaver, M. Haase, G. Callahan, I. Forst, A. Hearn, and J. McCall, "Crane hoist side pulls hazards, risks and alternative methods," *Weaver Co. Inc.*, 03 2021.
- [11] D. Chwa, "Sliding-mode-control-based robust finite-time antisway tracking control of 3-d overhead cranes," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 64, no. 8, pp. 6775–6784, aug 2017.
- [12] W. Devesse, M. Ramteen, L. Feng, and J. Wikander, "A real-time optimal control method for swing-free tower crane motions," in *Proc. IEEE Int. Conf. Automation Science and Engineering (CASE)*, Aug. 2013, pp. 336–341.
- [13] J. Vaughan, D. Kim, and W. Singhose, "Control of tower cranes with double-pendulum payload dynamics," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 18, no. 6, pp. 1345–1358, Nov. 2010.
- [14] N. Sun, Y. Fang, H. Chen, B. Lu, and Y. Fu, "Slew/translation positioning and swing suppression for 4-DOF tower cranes with parametric uncertainties: Design and hardware experimentation," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 63, no. 10, pp. 6407–6418, oct 2016.

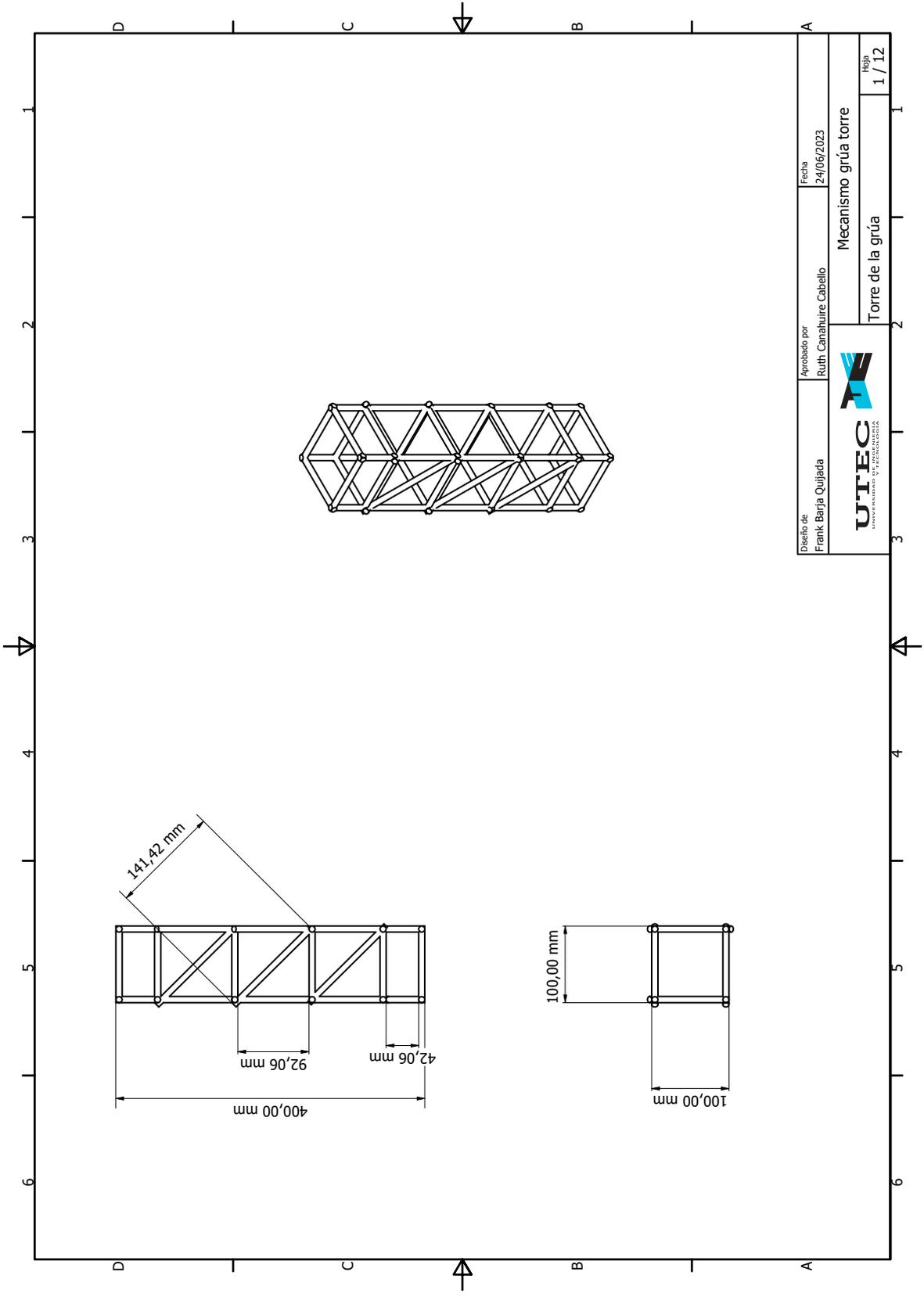
- [15] A. Fathi, Q. Shafiee, and H. Bevrani, “Robust Frequency Control of Microgrids Using an Extended Virtual Synchronous Generator,” *IEEE Transactions on Power Systems*, pp. 1–1, 2018.
- [16] J. Kardos, “Synthesis of a robust control algorithm for a robot positioning,” in *2018 ELEKTRO*. IEEE, may 2018.
- [17] H. Abderrezek, A. Ameer, and M. Harmas, “Stochastic optimization methods based robust control for DC/DC buck converter,” in *2018 5th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)*. IEEE, apr 2018.
- [18] J. Ye, M. Godjevac, and E. el Amam, “Position control of crane vessel during offshore installations: Using adaptive and robust control methods,” in *2017 21st International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*. IEEE, oct 2017.
- [19] T. Nguyen and N.-Y. Tran-Thi, “Robust anti – swing control of 3D crane system using GA – FUZZY,” in *2017 International Conference On Cyber Incident Response, Coordination, Containment & Control (Cyber Incident)*. IEEE, jun 2017.
- [20] S. Sano, H. Ouyang, and N. Uchiyama, “Robust control of rotary cranes under rope length variance via LMI optimization,” in *2012 IEEE International Conference on Industrial Technology*. IEEE, mar 2012.
- [21] M. A. Ahmad, R. M. T. R. Ismail, M. S. Ramli, R. E. Samin, and M. A. Zawawi, “Robust input shaping for anti-sway control of rotary crane,” in *TENCON 2009 - 2009 IEEE Region 10 Conference*. IEEE, nov 2009.
- [22] M. Z. M. Tumari, M. S. Saealal, M. R. Ghazali, and Y. A. Wahab, “ $\mathcal{H}_\infty$  controller with graphical LMI region profile for gantry crane system,” in *Proc. and The 13th Int The 6th Int. Conf. Soft Computing and Intelligent Systems Symp. Advanced Intelligence Systems*, Nov. 2012, pp. 1397–1402.

- [23] I. Burul, F. Kolonić, and J. Matuško, “The control system design of a gantry crane based on  $\mathcal{H}_\infty$  control theory,” in *Proc. 33rd Int. Convention MIPRO*, May 2010, pp. 183–188.
- [24] G. Rigatos, P. Siano, and M. Abbaszadeh, “Nonlinear H-infinity control for 4-DOF underactuated overhead cranes,” *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 40, no. 7, pp. 2364–2377, May 2017.
- [25] iStock, “Diferentes tipos de grúas.” [Online]. Available: <https://www.istockphoto.com/es/vector/diferentes-tipos-de-gr%C3%BAas-gm187628570-29182962>
- [26] M. Menendez, *Manual para la formación de operadores de grúa torre*. LEX NOVA, 2006.
- [27] J. Abdullah, R. Ruslee, and J. Jalani, “Performance comparison between lqr and flc for automatic 3 dof crane systems,” *International Journal of Control and Automation*, vol. 4, no. 4, pp. 163–178, Dec. 2011.
- [28] A. A. El-Badawy and M. M. G. Shehata, “Anti-sway control of a tower crane using inverse dynamics,” in *Proc. Int. Conf. Engineering and Technology (ICET)*, Apr. 2014, pp. 1–6.
- [29] S. Ileš, J. Matuško, and F. Kolonić, “Real-time predictive control of 3D tower crane,” in *Proc. IEEE 23rd Int. Symp. Industrial Electronics (ISIE)*, Jun. 2014, pp. 224–230.
- [30] X. Li and Z. Geng, “A novel trajectory planning-based adaptive control method for 3-d overhead cranes,” *International Journal of Systems Science*, vol. 49, no. 16, pp. 3332–3345, 2018.
- [31] A. Rojas Moreno, *Control avanzado Diseño y Aplicaciones en Tiempo Real*, 2001, ch. Control óptimo, pp. 123–202.
- [32] A. Rojas-Moreno, *Control no lineal multivariable*, 2012, ch. Control adaptativo con modelo referencial, pp. 65–80.

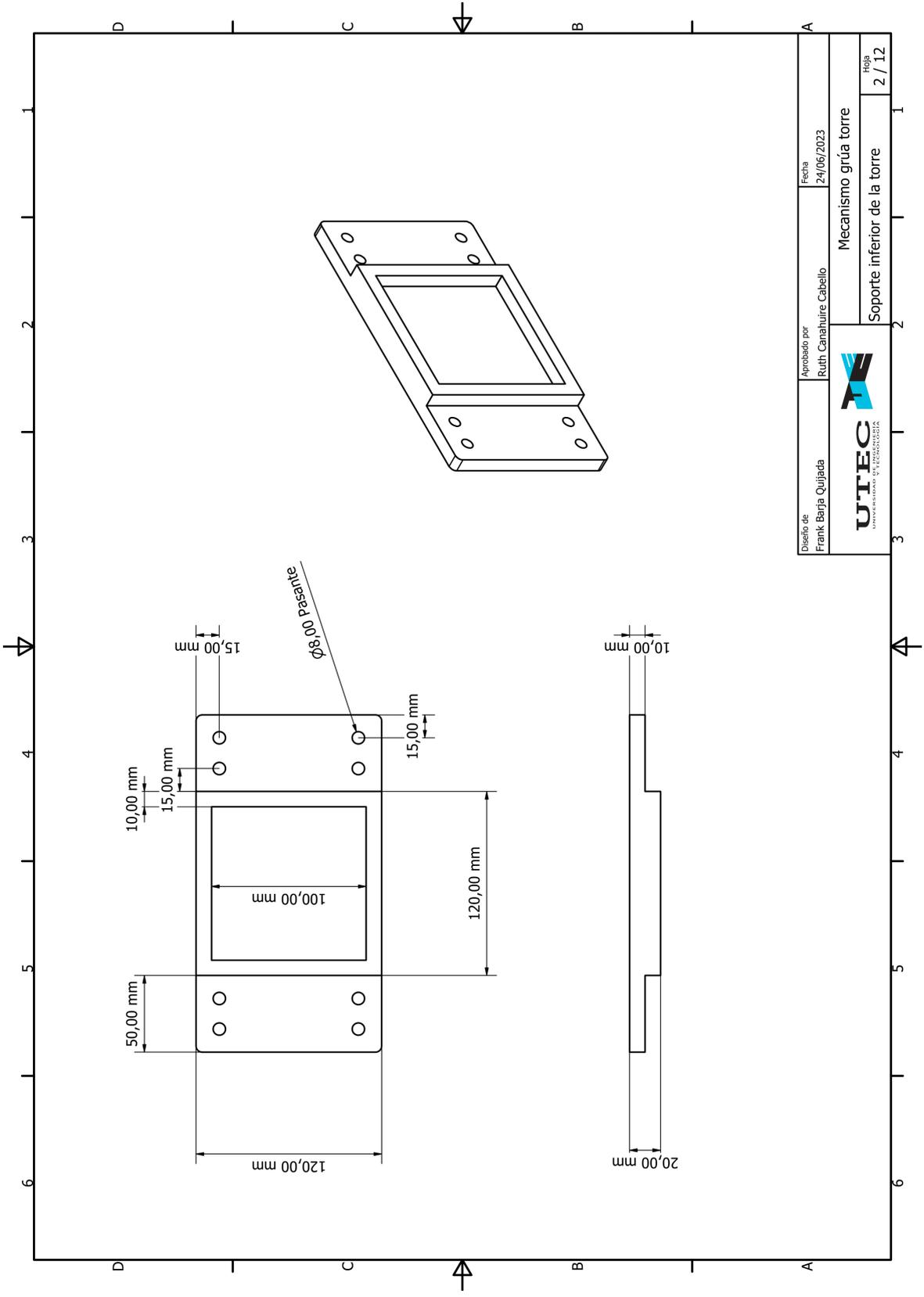
- [33] A. Rojas Moreno, *Control de procesos práctico y avanzado*, 2012, ch. Control PID SISO, pp. 71–130.
- [34] K. Ogata, *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*. Prentice Hall, 1996.
- [35] J.-J. Slotine and W. Li, *Applied nonlinear control*. Prentice-Hall, Inc, 1991, ch. Control of Multi-Input Physical Systems, pp. 392–415.
- [36] Z. Shengzeng and H. Xiongxiang, “Adaptive hji sliding mode control of three dimensional overhead cranes,” in *2016 Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, May 2016, pp. 5820–5855.
- [37] Pololu, “Catalog,” 2019. [Online]. Available: <http://www.pololu.com/product/2822>
- [38] RobotShop, “Lynxmotion,” 2019. [Online]. Available: <https://www.robotshop.com/uk/lynxmotion-12v-90-rpm-9911oz-in-1269-brushed-dc-gear-motor-w--encoder.html>
- [39] Drok, “Products,” 2019. [Online]. Available: <https://www.droking.com/160W-2-Channel-DC-Motor-Driver-Module-Positive-Negative-PWM-Speed-Regulation-Optocoupler-Isolation-Dual-H-bridge-Motor-Controller.html>

# **Apéndice A: Planos de los componentes del mecanismo**

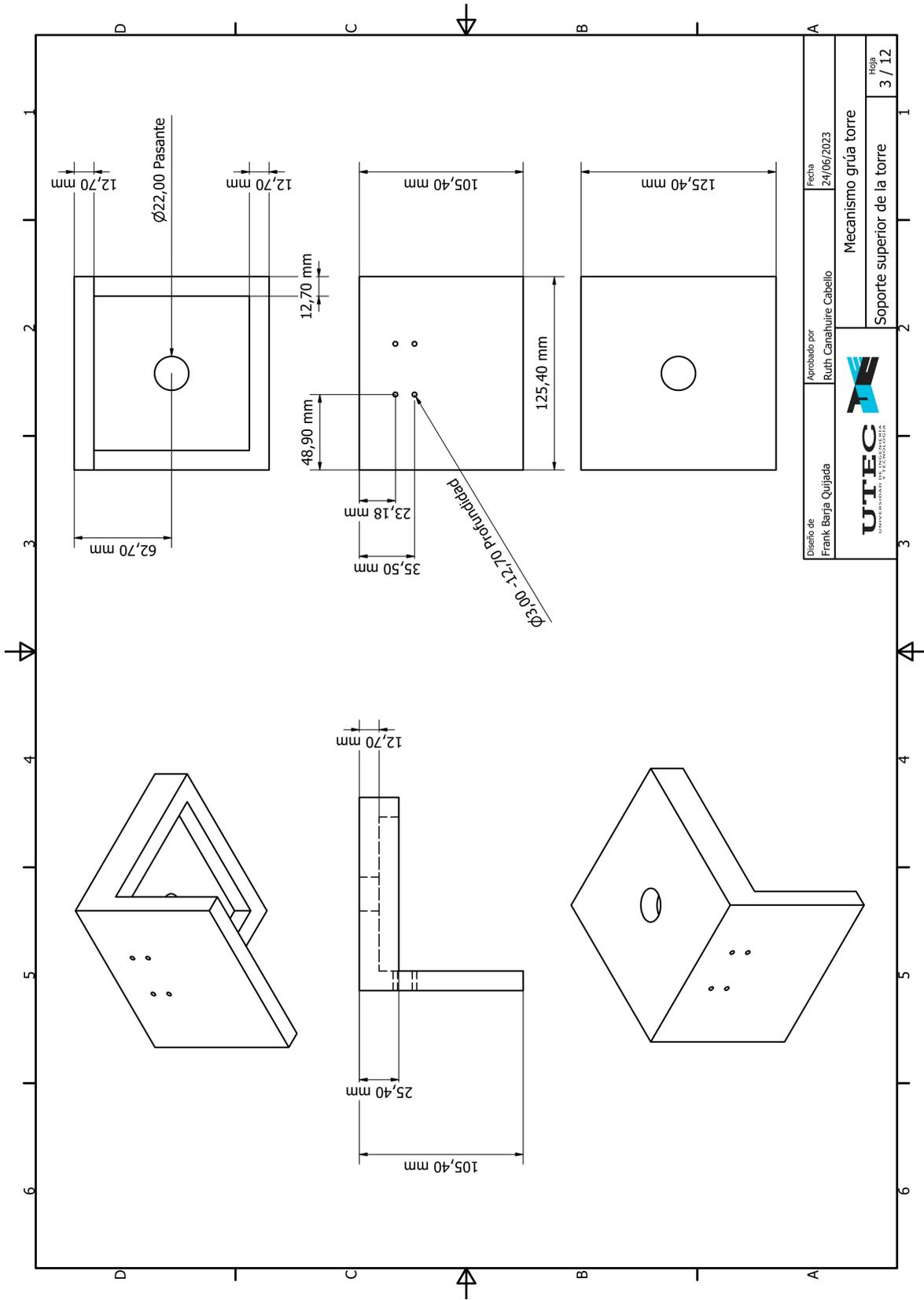
En esta sección se muestran los planos de las piezas diseñadas para la implementación del mecanismo tipo grúa torre que fue desarrollado en esta tesis.



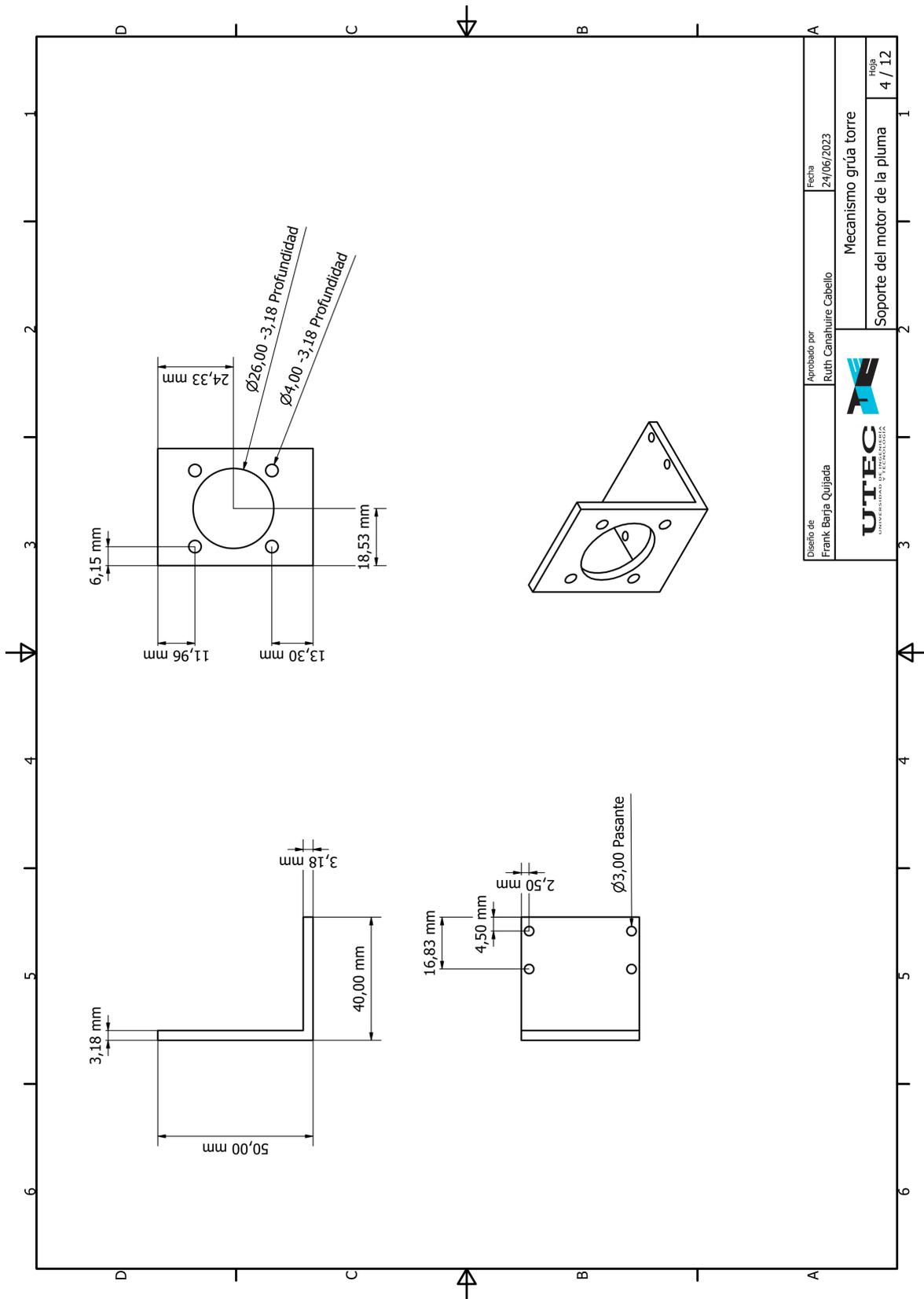
Diseño de Frank Barja Quijada	Aprobado por Ruth Canahuire Cabello	Fecha 24/06/2023
 <b>UTEC</b> <small>UNIVERSIDAD TÉCNICA DE CACHA</small>		<b>Mecanismo grúa torre</b> Torre de la grúa
		Hoja 1 / 12



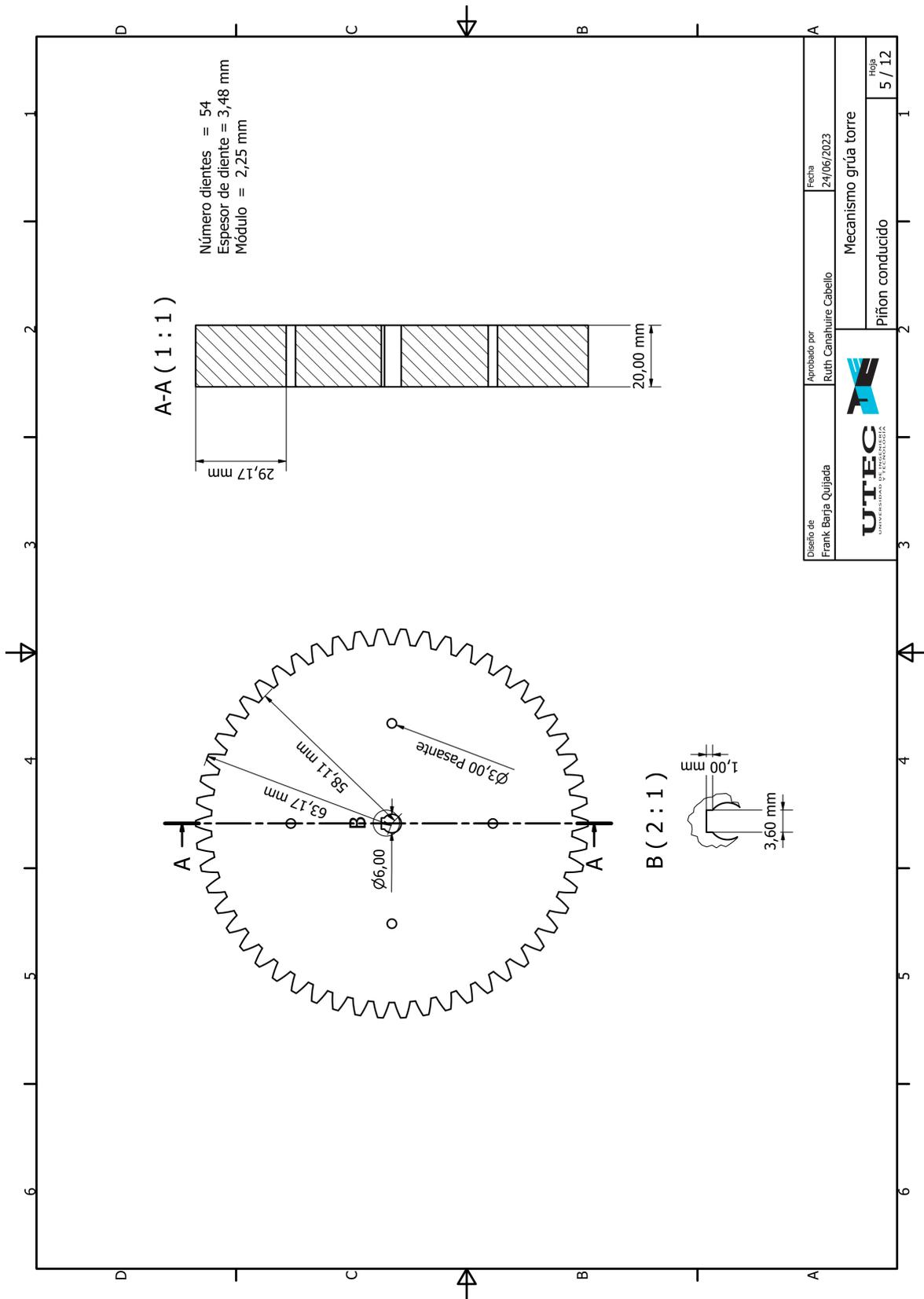
Diseño de Frank Barja Quijada	Aprobado por Ruth Canahuire Cabello	Fecha 24/06/2023
 <b>UTEC</b> <small>UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE COAHUILA DE ZARAGOZA</small>		<b>Mecanismo grúa torre</b> <b>SopORTE inferior de la torre</b>
		Hoja 2 / 12



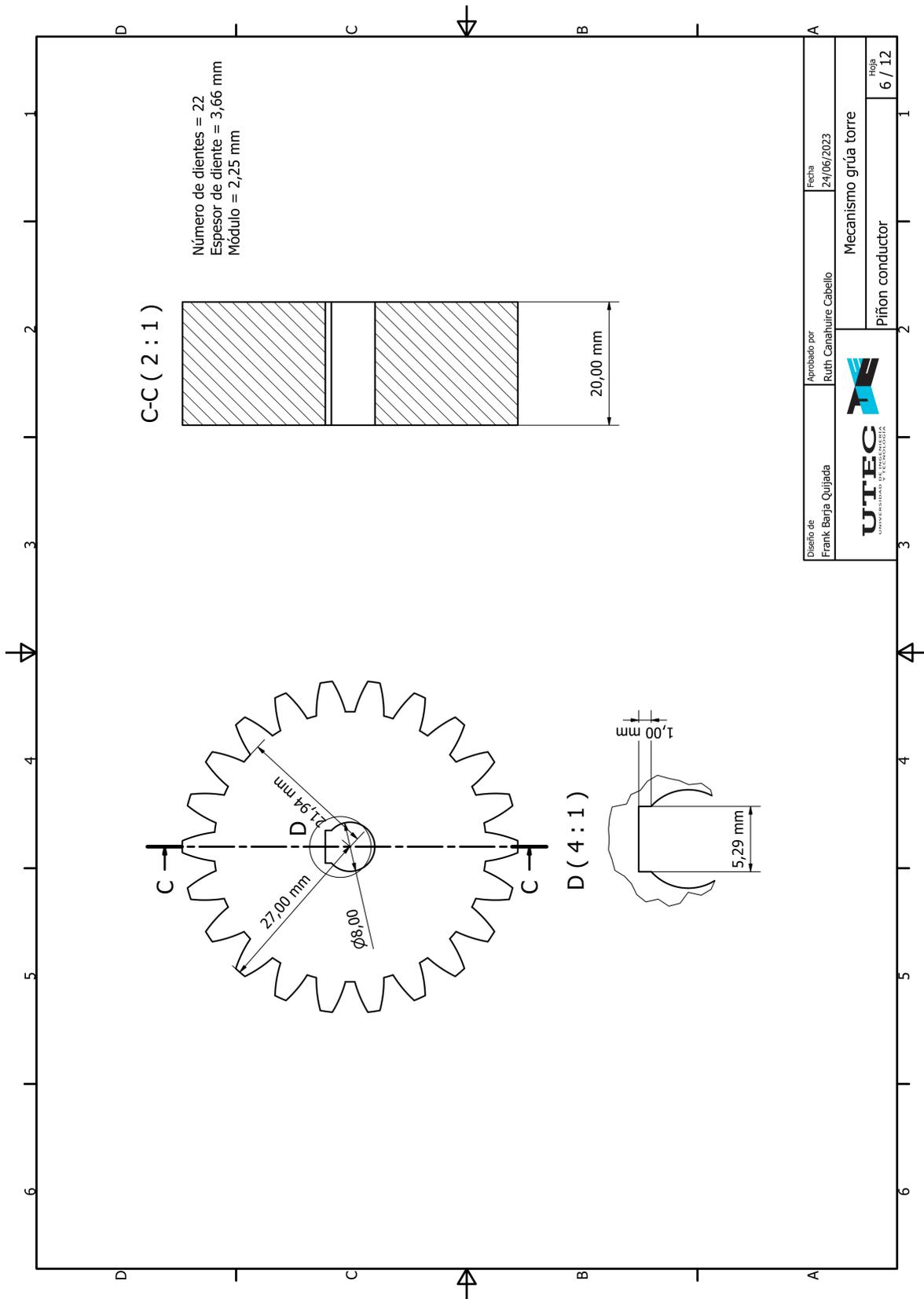
Diseño de Frank Barja Quijada	Aprobado por Ruth Canahuire Cabello	Fecha 24/06/2023
 <b>UTEC</b> <small>UNIVERSIDAD TÉCNICA DE CACHA</small>		<b>Mecanismo grúa torre</b>
<b>SopORTE superior de la torre</b>		Hoja <b>3 / 12</b>



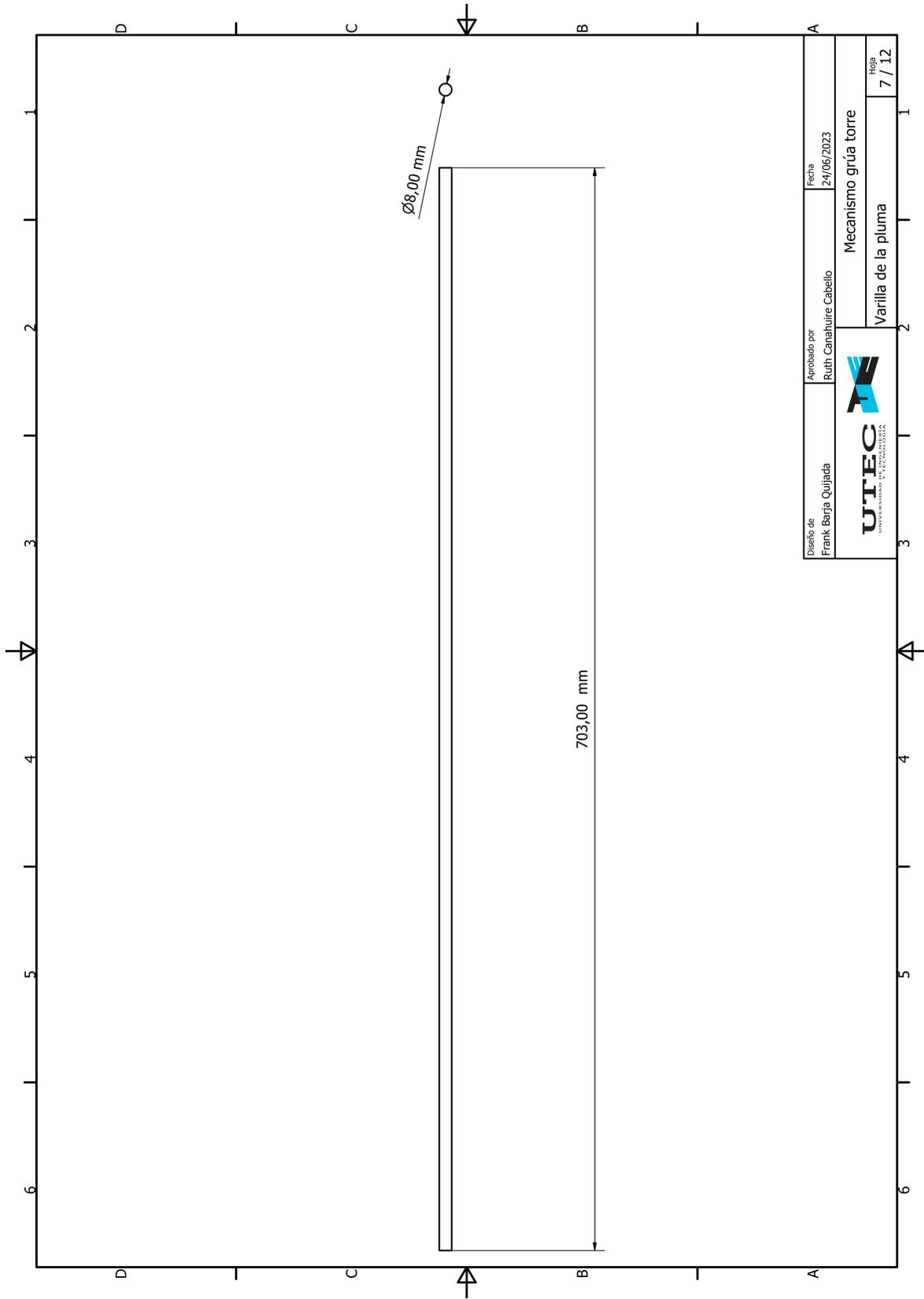
Diseño de Frank Barja Quijada	Aprobado por Ruth Canahuire Cabello	Fecha 24/06/2023
<b>UTEC</b> UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE COLOMBIA		<b>Mecanismo grúa torre</b>
Soporte del motor de la pluma		Hoja 4 / 12

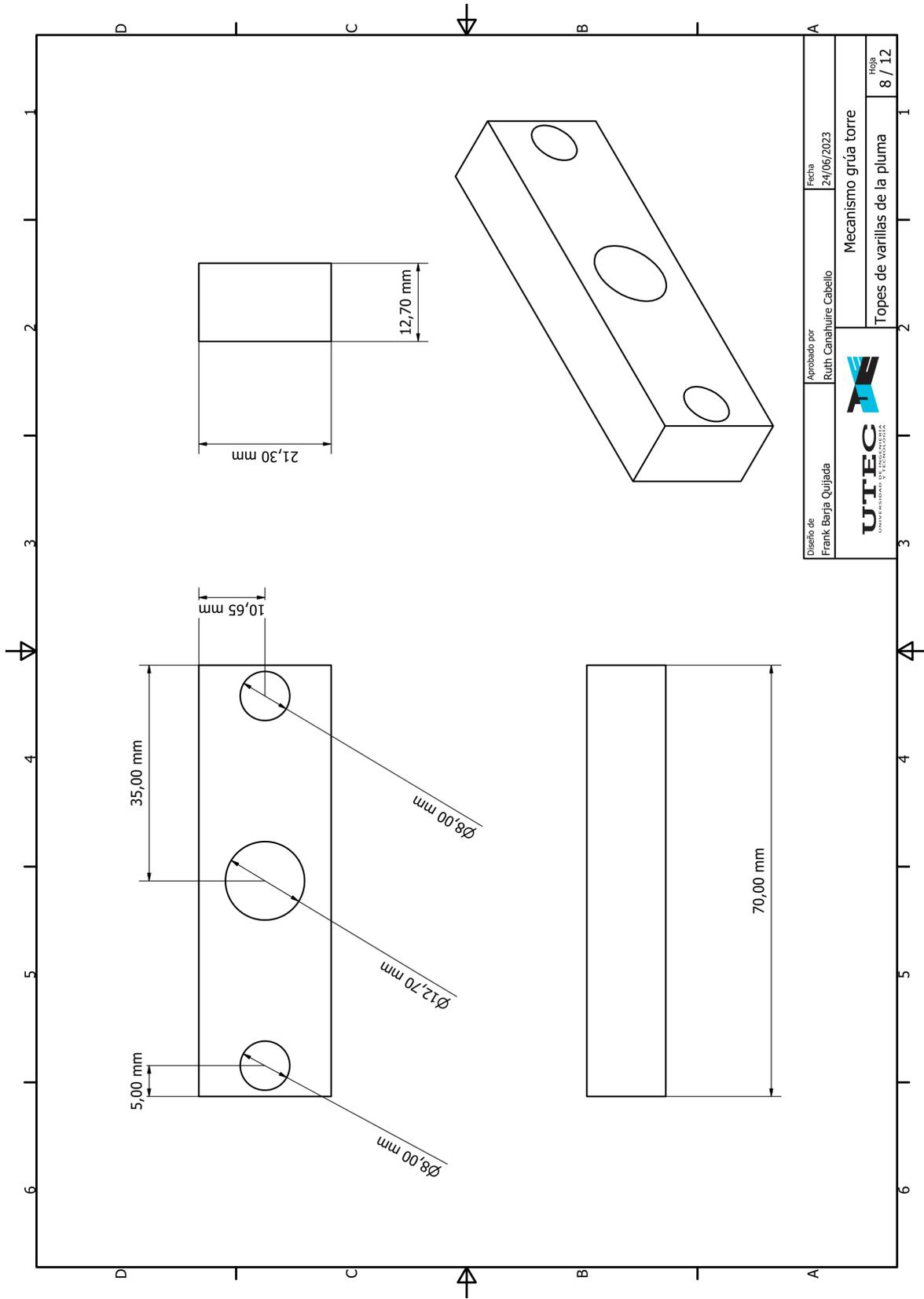


Diseño de Frank Barja Quijada	Aprobado por Ruth Canahuire Cabello	Fecha 24/06/2023
 <b>UTECS</b> <small>UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE CALABAZA</small>		Mecanismo grúa torre Piñon conducido
		Hoja 5 / 12

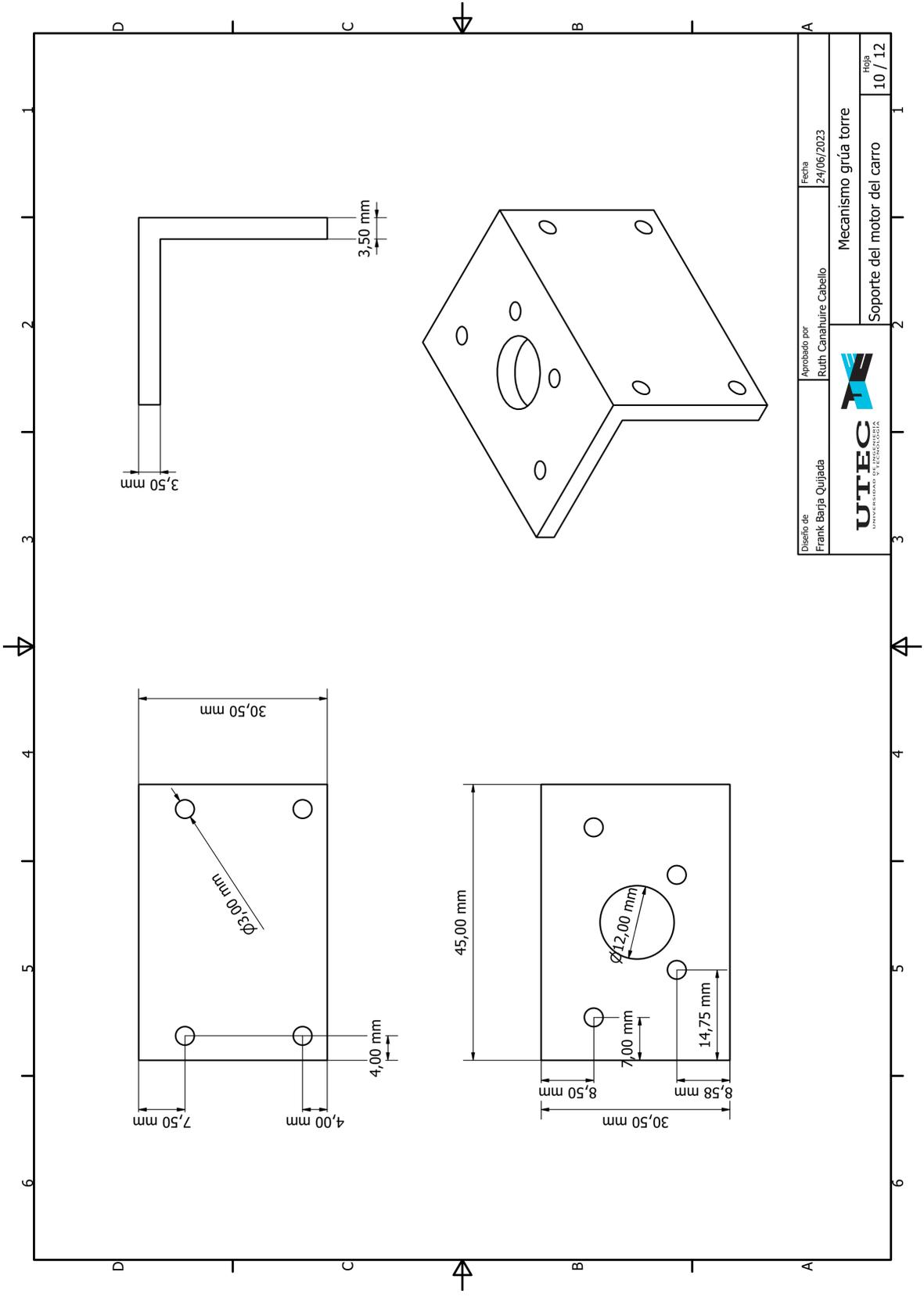


Diseño de Frank Barja Quijada	Aprobado por Ruth Canahuire Cabello	Fecha 24/06/2023
 <b>UTEC</b> <small>UNIVERSIDAD TÉCNICA DE CACHA</small>		Mecanismo grúa torre Piñón conductor
		Hoja 6 / 12

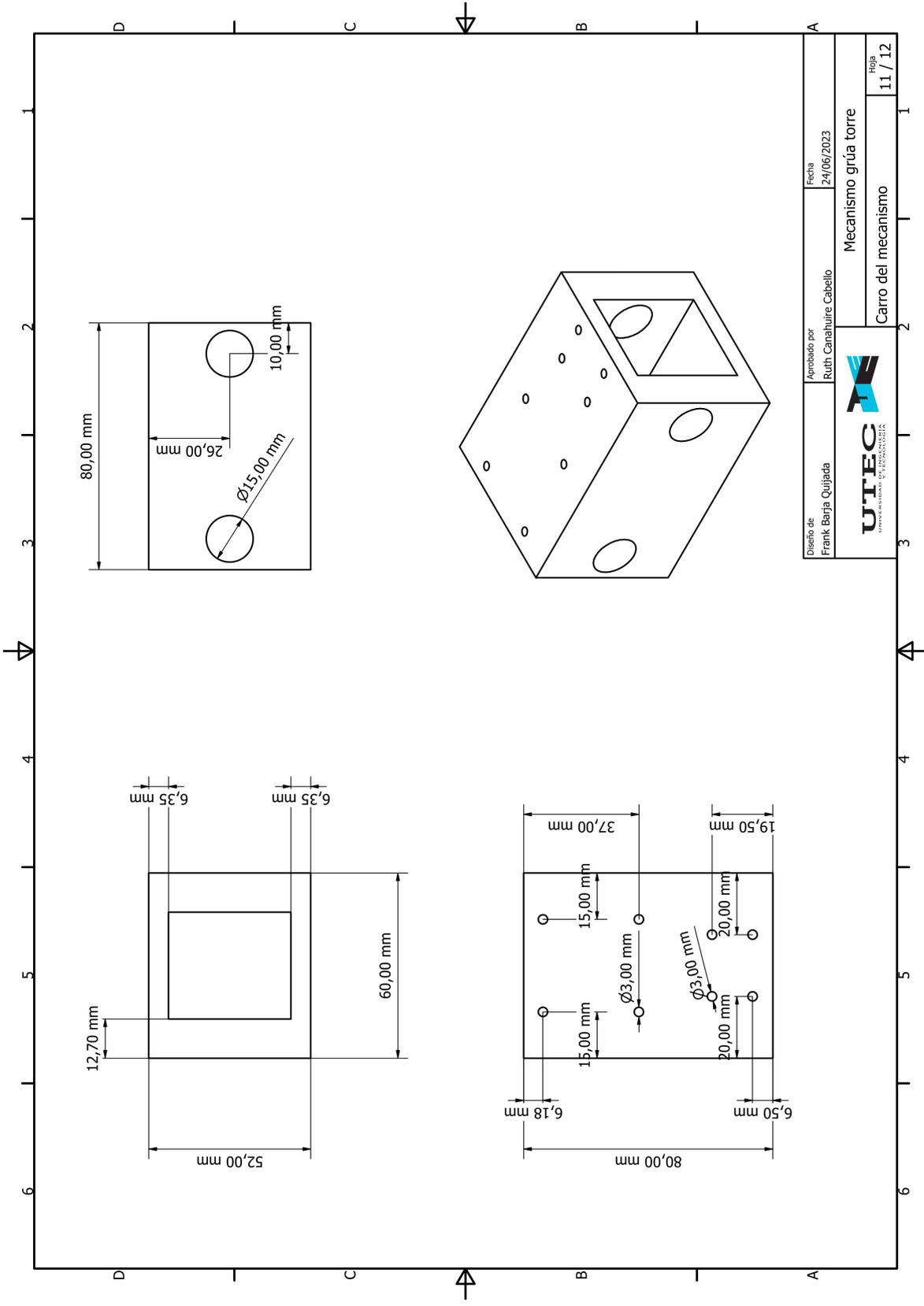


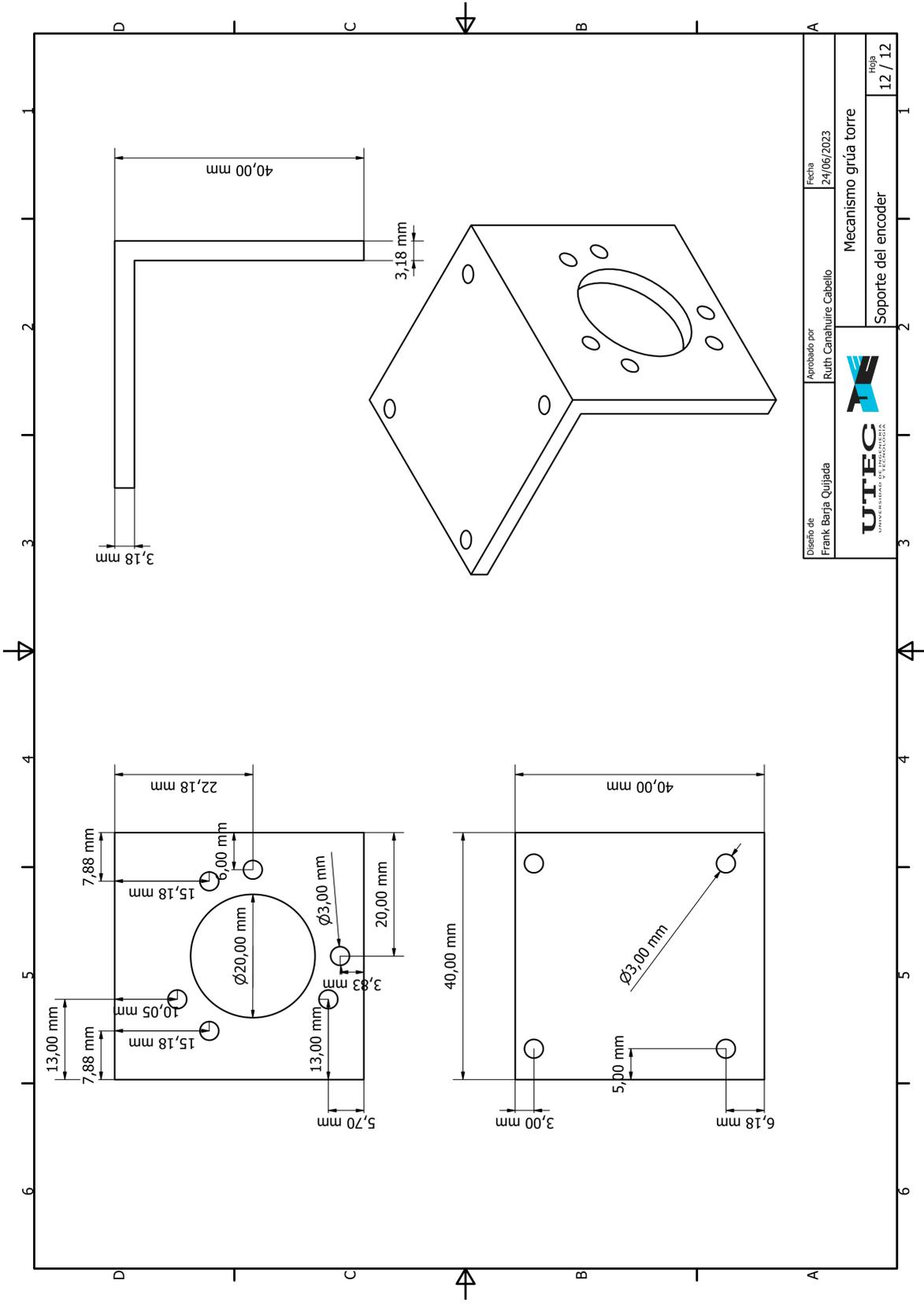


Diseño de Frank Barja Quijada	Aprobado por Ruth Canahuire Cabello	Fecha 24/06/2023
 <b>UTEC</b> <small>UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE COAHUILA DE ZARAGOZA</small>		<b>Mecanismo grúa torre</b> Tornos de varillas de la pluma
		Hoja 8 / 12



Diseño de Frank Barja Quijada	Aprobado por Ruth Canahuire Cabello	Fecha 24/06/2023	Hoja 10 / 12
 <b>UTEC</b> <small>UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA</small>		<b>Mecanismo grúa torre</b> Soporte del motor del carro	





Diseño de Frank Barja Quijada	Aprobado por Ruth Canahuire Cabello	Fecha 24/06/2023
<b>UTEC</b> UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE CACHA		<b>UTW</b>
Mecanismo grúa torre		Hoja 12 / 12
Soporte del encoder		

# Apéndice B: Archivos del diseño e implementación de los controladores

Los archivos que fueron usados para el diseño de los controladores PID, LQR y MRAC mediante el software Matlab y los archivos que fueron implementados en la Raspberry Pi mediante el lenguaje de programación Python se encuentran en el siguiente repositorio de GitHub: [tesis\\_utec](#). Este repositorio contiene 6 archivos los cuales se describen a continuación:

- `mcontrol_pid_grua.m`: Este archivo de Matlab contiene el diseño del controlador PID mediante el uso de la ecuación del algoritmo PID (Ecuación (3.30)). La parte final del código grafica los resultados de posición del carro, posición angular del péndulo y señal de control para lo cual se ha usado el modelo lineal de la grúa discretizado directamente.
- `mcontrol_lqr_grua.m`: Este archivo de Matlab contiene el diseño del controlador LQR mediante el procedimiento descrito anteriormente. La parte final del código grafica los resultados de posición del carro, posición angular del péndulo y señal de control para lo cual se ha usado el modelo lineal de la grúa discretizado directamente.
- `mcontrol_adaptativo_grua.m`: Este archivo de Matlab contiene el diseño del controlador MRAC descrito previamente, además se desarrolló la modificación explicada en la Sección 4.2 para la superficie de deslizamiento del controlador (Ecuación (4.1)). La parte final del código grafica los resultados de posición del carro, posición angular del péndulo y señal de control para lo cual se ha usado el modelo dinámico de la grúa.

- `pcontrol_pid_grua.py`: Este archivo de Python inicia con la configuración de entradas y salidas de la tarjeta Raspberry Pi, después se obtienen las lecturas del encoder del motor del carro y del encoder que mide el ángulo de oscilación del péndulo, asimismo la señal de control que se encarga de mover el carro. Luego, se implementa el control PID diseñado y finalmente se guardan los datos de posición del carro, posición angular del péndulo y señal de control para ser graficados.
- `pcontrol_lqr_grua.py`: Este archivo de Python inicia con la configuración de entradas y salidas de la tarjeta Raspberry Pi, después se obtienen las lecturas del encoder del motor del carro y del encoder que mide el ángulo de oscilación del péndulo, asimismo la señal de control que se encarga de mover el carro. Luego, se implementa el controlador LQR diseñado y finalmente se guardan los datos de posición del carro, posición angular del péndulo y señal de control para ser graficados.
- `pcontrol_adaptativo_grua.py`: Este archivo de Python inicia con la configuración de entradas y salidas de la tarjeta Raspberry Pi, después se obtienen las lecturas del encoder del motor del carro y del encoder que mide el ángulo de oscilación del péndulo, asimismo la señal de control que se encarga de mover el carro. Luego, se cargan los parámetros del modelo dinámico desarrollado que son necesarios para la implementación del controlador MRAC diseñado. Finalmente, se guardan los datos de posición del carro, posición angular del péndulo y señal de control para ser graficados.