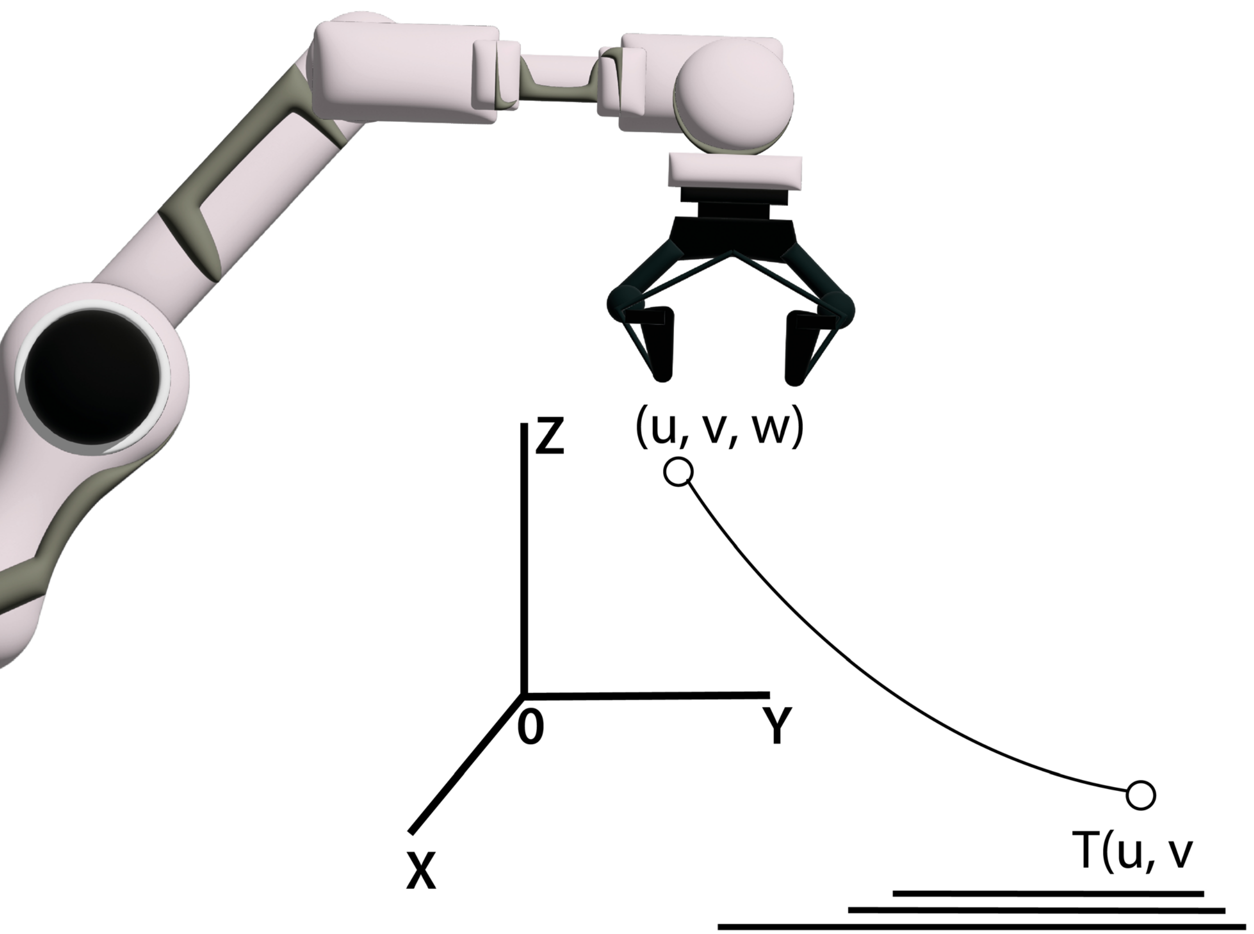
Hermes Pantoja | Brígida Molina | Rosa Jabo
| Rósulo Pérez | Víctor Anhuaman

ÁLGEBRA LINEAL para ingeniería con MatLab



ÁLGEBRA LINEAL

Para ingeniería con MatLab

Hermes Pantoja | Brígida Molina | Rosa Jabo
| Rósulo Pérez | Víctor Anhuaman

ÁLGEBRA LINEAL para ingeniería con MatLab

UTEC PRESS

Álgebra lineal
Para ingeniería con MatLab

Editado por:
© Universidad de Ingeniería y Tecnología
para su sello editorial UTEC PRESS
Jr. Medrano Silva 165, Barranco, Lima 04, Perú
www.utec.edu.pe

Revisión por pares:
Xyoby Chávez
Tomás Gálvez

Cuidado de la edición:
Militza Angulo Flores

Diseño de carátula:
Juan Carlos García Miguel

Carátula:
sobre la base de una ilustración de www.freepik.com - macrovector

Primera edición digital: octubre de 2024

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 202408641
ISBN: 978-612-48515-8-2

Índice general

1. Matrices

1.1. Definiciones generales

1.1.1. Matriz

Definición

Una matriz A es un arreglo de m-filas y n-columnas de $m \times n$ números reales:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se dice que A es una matriz de tamaño $m \times n$ y simbólicamente se escribe

$$A = [a_{ij}]$$

$i = 1, 2, \ldots m;\ j = 1, 2, \ldots, n$

Ejemplo

La siguiente matriz es de 1×3 con $a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, y $a_{13} = -2$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Al conjunto que contiene todas las matrices de números reales que tienen m filas y n columnas se le denota por $M_{m \times n}$.

Ejemplo

La siguiente matriz es de 2×3

$$\begin{bmatrix} 0 & \pi & -2 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

1.1.2. Igualdad de matrices

Definición

Dos matrices $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ son **iguales** si y solo si:

- A y B tienen el mismo orden
- $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$

Ejemplo

Determine el valor de a para que las matrices

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & 2a \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

sean iguales.

1.1.3. Operaciones con matrices

1. **Multiplicación de un escalar con una matriz**. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}$ se define $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$.

   Ejemplo

   $$\sqrt{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \\ \sqrt{2} & -4 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 2 & -4\sqrt{2} & 0 & 5\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

2. **Suma de matrices**. Si $A, B \in M_{m \times n}$ y $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, se define la suma de A y B como $A + B = [c_{ij}]$, con $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \ \forall i, j$.

Ejemplo

Si
$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 5 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$
entonces
$$A + B = \begin{bmatrix} -6 & -9 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Propiedades:

- conmutativa: $A + B = B + A$
- asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- elemento neutro: $A + O = A$
- inverso aditivo : $\forall A \in M_{m\times n} : \exists!\ B \in M_{m\times n}\ /\ A + B = O$

3. Multiplicación de un vector fila por un vector columna (producto interno)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n1} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots a_{1n}b_{n1}$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} = (-1)(2) + (0)(-1) + (-2)(0)$$
$$+ (4)(0) + (5)(-4)$$
$$= -22.$$

4. Multiplicación de un vector columna por un vector fila (producto externo)

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_m \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_m \end{bmatrix}$$

5. **Producto de una matriz $m \times n$ con una matriz $n \times p$.** Si $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}$ y $B = (b_{ij}) \in M_{n\times p}$, el producto de A con B se define como $AB = (c_{ij})$ donde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

para $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, p$.
El número de filas y el número de columnas de C son iguales al número de filas de A y al número de columnas de B, respectivamente. De este modo,

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ m \times n & n \times p & m \times p \end{array}$$

Ejemplo

Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine $A \times B$.

Solución

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} 2(5)+1(1) & 2(0)+1(-1) & 2(4)+1(0) \\ -1(5)+3(1) & -1(0)+3(-1) & -1(4)+3(0) \\ 1(5)+2(1) & 1(0)+2(-1) & 1(4)+2(0) \end{bmatrix}$$

Propiedades:

- **distributiva:** A(B + C) = AB + AC; (B + C)A = BA + CA
- **asociativa:** A(BC) = (AB)C
- **transpuesta de un producto:** $(AB)^T = B^T A^T$
- **elemento neutro:** $\forall A : AI = A$
- **elemento nulo:** $\forall A : AO = O$

Se puede verificar en general que AB $\neq$ BA.

1.1.4. Matrices especiales

1. **Matriz cero**. La matriz cero de orden $m \times n$ se define como aquella que tiene las $m \times n$ componentes nulas; esto es,

$$\mathscr{O} = \left[a_{ij}\right]$$

donde $a_{ij} = 0,\ \forall i, j$

Ejemplo

$$0_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. **Matriz identidad**. La matriz identidad de orden $n \times n$ es de la forma:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

es decir $I_n = (a_{ij})$, donde:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Ejemplo

$$\mathrm{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathrm{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. **Matriz triangular superior**. Una matriz cuadrada A de orden n es **triangular superior** si las componentes que están por debajo de la diagonal son todas nulas.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

4. **Matriz triangular inferior**. Una matriz cuadrada B de orden n es **triangular inferior** si las componentes que están por arriba de la diagonal son todas iguales a cero.

Ejemplo

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

5. **Matriz transpuesta**. Si $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}$ se define la **matriz transpuesta** de A como $A^T = (b_{ij})$, donde $b_{ij} = a_{ji}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, m$.

Ejemplo

Si la matriz A está dada por

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 10 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 15 & -2 \end{bmatrix}$$

entonces A^T está dada por

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 10 & 1 \\ 5 & 6 & -2 & 15 \\ 7 & 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

6. **Matriz simétrica**. Una matriz A es **simétrica** cuando $A^T = A$.

Ejemplo

$$B = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 7 \\ -2 & -9 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

7. **Matriz antisimétrica**. Una matriz A es **antisimétrica** cuando $A^T = -A$.

Ejemplo

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & -3 \\ -7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

1.1.5. Matrices invertibles y sus inversas

Definición

Una matriz cuadrada A de orden n es **invertible** si existe una matriz C del mismo tamaño tal que

$$AC = CA = I_n$$

1.2. Matriz inversa

1.2.1. Definiciones generales

Definición

Si $A \in M_{n\times n}$ es invertible, a la única matriz $C \in M_{n\times n}$, tal que $AC = CA = I_n$, se le llama **matriz inversa** de A y se le denota como A^{-1}, es decir, $C = A^{-1}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Halle la inversa de la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Está claro que no toda matriz cuadrada tiene inversa, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo

La siguiente matriz no tiene inversa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

No puede tener inversa, puesto que al multiplicarla por cualquier otra matriz cuadrada de orden 2 se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que en ningún caso puede ser la identidad.
Diremos que la matriz A es **invertible** si existe una matriz inversa de A.

1.2.2. Propiedades de matrices invertibles

Propiedades

Dadas las matrices cuadradas A y B de orden $n \times n$:

- Si A y B son invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Si A es invertible, entonces A^T es invertible y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

1.3. Operaciones elementales por filas

Definición

Operaciones elementales	Notación
Intercambio de filas	$f_i \longleftrightarrow f_j$
Multiplicación de fila por una constante	$f_i \to \lambda f_i \quad \lambda \neq 0$
Adición de múltiplo de una fila a otra	$f_i \to f_i + \lambda f_j$

Ejemplo

Dada la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 16 \\ 1 & 0 & -3 \\ -4 & 14 & 2 \end{bmatrix}$

realice todas las operaciones elementales.

Solución

- Intercambio de dos filas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 & 16 \\ 1 & 0 & -3 \\ -4 & 14 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{f}_1 \leftrightarrow \mathrm{f}_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 8 & 16 \\ -4 & 14 & 2 \end{bmatrix}$$

- Multiplicación de fila por una constante no nula:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 8 & 16 \\ -4 & 14 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{2f_2 \to f_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 16 & 32 \\ -4 & 14 & 2 \end{bmatrix}$$

- Adición de múltiplo de una fila a otra fila:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 8 & 16 \\ -4 & 14 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{4f_1 + f_3 \to f_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 8 & 16 \\ 0 & 14 & -10 \end{bmatrix}$$

A partir de esta definición se obtiene el siguiente concepto:

Matrices equivalentes

Dos matrices A y B son **equivalentes por filas** si se puede obtener una a partir de la otra mediante operaciones elementales por filas. Se representan por $A \sim B$.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_1+f_3 \to f_3]{2f_1+f_2 \to f_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_4 - f_2 \to f_4]{f_3 - f_2 \to f_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

La matriz A es equivalente a la matriz B. Es decir: $A \sim B$

Matriz escalonada por filas

Una matriz es **escalonada por filas** si satisface las siguientes propiedades:

1. Todas las filas conformadas únicamente por ceros (en caso de existir) se ubican en la parte inferior de la matriz.

2. En las filas que contienen elementos distintos de cero, el primer elemento no nulo de una fila se encuentra más a la *izquierda* que el primer elemento no nulo de la fila siguiente.

Ejemplos de matrices escalonadas

En cada fila no nula la primera entrada diferente de cero está marcada con el color rojo.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejemplos de matrices no escalonadas

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio

¿Cuáles de las siguientes matrices son escalonadas?

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriz escalonada reducida (ERF)

Una matriz se llama escalonada reducida si cumple con las propiedades 1 y 2, y con las siguientes propiedades:

- Sus pivotes (primer elemento no nulo) de cada fila no nula son todos iguales a 1.
- En cada fila el pivote es el único elemento no nulo de su columna.

Ejemplos de matrices escalonadas reducidas

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.4. Rango de una matriz

Rango de una matriz

Sea A una matriz de orden $m \times n$, se llama rango de A y se denota $Rng(A)$ al número de filas no nulas de cualquier matriz escalonada E por filas equivalente a A.

Ejemplo

Calcular el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Solución

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_4-2f_1\to f_4]{f_2-2f_1\to f_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3+5f_2\to f_3]{f_4+4f_2\to f_4} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_3\leftrightarrow f_4} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E$$

$$A \sim E \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Rng}(A) = \mathrm{Rng}(E) \overset{\substack{E \text{ escalonada} \\ \downarrow}}{=} 3 \text{ (nro. filas no nulas de } E)$$

Ejercicios

Calcule el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

1.5. Determinantes

1.5.1. Definiciones generales

Determinante de 2 × 2

Si es una matriz de orden 2×2 se define el determinante de la matriz A y se expresa como $det(A)$ o bien $|A|$:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Observación: Es importante no confundir la notación de barras verticales. Cuando A es una matriz cuadrada, $|A|$ denota $\det(A)$. Sin embargo, cuando x es un número real, $|x|$ denota el valor absoluto de x.

Ejemplo

Halle el determinate de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución

$|A| = 3 \times 5 - 2 \times 1 = 13.$

Determinante de 3 × 3

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

el determinante de A es

$$\det(A) = |A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \\ -8 & 6 & 9 \end{bmatrix}$. Calcule $\det(A)$

Solución

$$|A| = 4\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -8 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-51) - 7(35) - 2(-22) = -405$$

Regla de Sarrus

La **regla de Sarrus** nos sirve para resolver de manera sencilla el determinante de una matriz de orden 3×3.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\begin{array}{c|ccc|cc} & + & + & + & & \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & - & - & - & & \end{array}$$

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \\ -8 & 6 & 9 \end{bmatrix}$. Calcule $\det(A)$ utilizando la regla de Sarrus.

Solución

$$|A| = (4)(-5)(9) + (7)(1)(-8) + (3)(6)(-2) - (-2)(-5)(-8) - (7)(3)(9) - (1)(6)(4)$$

$$|A| = -272 - 133 = -405$$

1.5.2. Propiedades de los determinantes

Propiedades

Si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces:

- det es invariante mediante operaciones elementales fila y/o columna.
- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a' & a & a'' \\ b' & b & b'' \\ c' & c & c'' \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} a & a' & 0 \\ b & b' & 0 \\ c & c' & 0 \end{vmatrix} = 0$
- $\begin{vmatrix} a & a' & a+a' \\ b & b' & b+b' \\ c & c' & c+c' \end{vmatrix} = 0$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$
- Si A es invertible, entonces $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

1.6. Aplicaciones con MatLab

1.6.1. Medallero olímpico Tokio 2020

Medallero olímpico Tokio 2020

En las olimpiadas de Tokio 2020, Estados Unidos obtuvo 113 medallas, de las cuales 39 fueron de oro, 41 de plata y 33 de bronce. Gran Bretaña obtuvo 65 medallas, de las cuales 22 fueron de oro, 21 de plata y 22 de bronce. China obtuvo 88 medallas, de las cuales 38 fueron de oro, 32 de plata y 18 de bronce. Rusia (los deportistas rusos compitieron bajo el nombre de ROC) obtuvo 71 medallas, de las cuales 20 fueron de oro, 28 de plata y 23 de bronce. Alemania obtuvo 37 medallas, de las cuales 10 fueron de oro, 11 de plata y 16 de bronce.

1. Organice la información en una tabla que describa el número de medallas de oro, plata y bronce que obtuvo cada país mencionado.

   Solución

   ```
   Tokio_2020=[39 41 33;22 21 22-;28 32 18;20 28 23;10 11 16]
   ```

2. Calcule el número total de cada tipo de medallas que han conseguido Estados Unidos, Gran Bretaña, China, Rusia y Alemania en los dos últimos Juegos Olímpicos: Tokio 2020 y Río 2016. **Sugerencia: se debe organizar la información del segundo medallero conservando el orden presentado en el primer medallero**.

   Solución

   ```
   Rio_2016=[46 37 38;27 23 17;26 18 26;19 17 20; 17 10 15]
   Total_Medallas=Tokio_2020+Rio_2016
   ```

3. Si se parte del supuesto de que, en los Juegos Olímpicos Tokio 2020, los jugadores de Estados Unidos, Gran Bretaña, China, Rusia y Alemania recibieron por parte de marcas patrocinadoras cierta cantidad de dinero para cubrir algunos de los gastos que se presentaran en las olimpiadas, y se cree que para los juegos de París 2024 tales marcas coincidentemente incrementarán sus aportes en un 20 % para los jugadores de los países mencionados, pronostique la cantidad que percibirán estos países.

País	Aporte Patrocinadores
Estados Unidos	20000
Gran Bretaña	30000
China	27000
Rusia	25000
Alemania	10000

Solución:

```
Aporte_Patrocinadores_2020=[20000;30000;27000;25000;10000]
Aporte_Patrocinadores_2024=1.2*Aporte_Patrocinadores_2020
```

4. Se parte del supuesto de que en estos Juegos Olímpicos 2020 cada participante ganador de cualquiera de las medallas se llevaba, además de estas, dinero según la medalla recibida. Calcule la cantidad de dinero que recibieron los jugadores de China. Calcule la cantidad de dinero que recibieron los otros países.

Tipo de Medalla	Cantidad de dinero por tipo de medalla (Euros)
Oro	94000
Plata	48000
Bronce	30000

Solución

```
Cantidad_Dinero_Medalla=[94000;48000;30000]
Cantidad_Dinero_China=Total_Medallas(3,:)*Cantidad_Dinero_Medalla
Cantidad_Dinero_Paises=Total_Medallas*Cantidad_Dinero_Medalla
```

1.6.2. Sistema criptográfico

Sistema criptográfico

El cifrado o encriptación es el proceso de transformar datos a un formato ilegible. Su propósito es garantizar la privacidad, manteniendo la información oculta para cualquier persona que no sea el destinatario previsto, incluso para aquellos que puedan acceder a los datos cifrados. Por otro lado, el descifrado o desencriptación es el proceso inverso que convierte los datos cifrados nuevamente a un formato comprensible.

Considere

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	_
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

A continuación, se detallan los pasos a seguir:

1. **Conversión del mensaje a un arreglo**: El mensaje original debe estructurarse en un arreglo siguiendo un orden específico, el cual puede ser por filas o por columnas, según el método de encriptación seleccionado. Este orden es crucial, ya que dictará la manera en que el mensaje será leído y procesado durante la encriptación.

2. **Interpretación del Arreglo**: Una vez organizado el mensaje en el arreglo, se procede a aplicar la matriz de encriptación K_1 para generar el mensaje cifrado C. Es fundamental comprender el orden de lectura del arreglo, tanto para la encriptación como para la posterior desencriptación, asegurando así la correcta aplicación del método.

1. Determine el mensaje original M que fue utilizado para la encriptación, dado que se cumple la relación $K_1 \times M = C$, donde:
   K_1 : Matriz clave pública utilizada para encriptar el mensaje
   C : Mensaje encriptado obtenido tras aplicar la matriz K_1 al mensaje original.
   Nota: Organice el mensaje original M en un arreglo siguiendo un orden específico y aplique la matriz de encriptación K_1 para verificar que se cumple la relación con el mensaje cifrado C. El mensaje original se debe leer por filas en el arreglo resultante.

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 19 & 15 & 25 \end{bmatrix}$$

Solución

```
K1=[1 -1;0 1]
C=[6 0 2;19 15 25]
M=inv(K1)*C
```

Mensaje: **YO SOY**

Ejercicio propuesto

Lucía y Trini van a una tienda. Sus listas son las que se muestran en la siguiente tabla.

Artículo	Cantidad que necesita Lucía	Cantidad que necesita Trini
Leche	2 latas	3 latas
Huevos	1 docena	2 docenas
Mantequilla	2 barras	1 barra
Arroz	5 paquetes	4 paquetes
Granola	1 caja	3 cajas

Los artículos tienen los siguientes costos:

Producto	Costo
Leche	S/ 2.20 por lata
Huevos	S/ 6.25 por docena
Mantequilla	S/ 1.25 por barra
Arroz	S/ 4.55 por paquete
Granola	S/ 7.15 por caja

- Almacene en la matriz L y en la matriz N la factura total para cada compradora respectivamente.
- Solo considere dos productos: leche y huevos. Almacene la información de la factura total de ambas compradoras en la matriz P.
- Realice la siguiente operación: $P^2 + 3I$; I: matriz identidad.
- Halle la inversa de la matriz P.

1.6.3. Matriz insumo-producto

Las matrices insumo-producto, desarrolladas por W.W. Leontief, reflejan las interrelaciones existentes entre los diferentes sectores de una economía durante un período determinado. A modo de ejemplo hipotético, para una economía simplificada se presenta la matriz M. En este caso, los sectores consumidores son los mismos que los productores: industrial, gubernamental, acero, agricultura, doméstico, etc. Cada fila muestra cómo el producto de un sector específico es consumido por los cuatro sectores considerados.

$$\begin{array}{rc}
 & \overbrace{\begin{array}{cccc}\text{Industria} & \text{Industria} & \text{Industria} & \text{Otros}\\ \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{consumidores}\end{array}}^{\textbf{CONSUMIDORES}}\\
\textbf{PRODUCTORES} & \\
\mathbf{M} = \begin{array}{l}\text{Industria A}\\ \text{Industria B}\\ \text{Industria C}\\ \text{Otros productores}\end{array} & \begin{bmatrix} 50 & 70 & 200 & 360\\ 90 & 30 & 270 & 320\\ 120 & 240 & 100 & 1{,}050\\ 420 & 370 & 940 & 4{,}960\end{bmatrix}
\end{array}$$

Preguntas

P1

Halle la producción total de la industria A.
Sugerencia: el total de la producción de cada industria es igual a la suma de las entradas en cada fila de la **matriz insumo-producto** que representa la producción total de cada industria respectivamente para un periodo.

Solución

```
M=[50 70 200 360;90 30 270 320;120 240 100 1050;420 370 940 4960]
IndusA_Prod=sum(M(1,:))
```

P2

Suponga que la matriz de insumo-producto sufre los siguientes cambios después de realizar las siguientes operaciones elementales por filas:

- Multiplique la segunda fila por 5.
- A la matriz resultante, multiplique la primera fila por 2 y súmela a la tercera fila.
- A la matriz resultante, permute la segunda y tercera fila.

Halle la producción total de la industria C.

Solución

```
M=[50 70 200 360;90 30 270 320;120 240 100 1050;420 370 940 4960]
M(2,:)=5*M(2,:);M(3,:)=M(3,:)+2*M(1,:)
M([2 3],:)=M([3 2],:)
IndusC_Prod=sum(M(3,:))
```

P3

Considerando la matriz insumo-producto original:

- Halle su correspondiente matriz escalonada a través de operaciones elementales.
- Determine el rango de la matriz de insumo-producto.

Solución

```
M=[50 70 200 360;90 30 270 320;120 240 100 1050;420 370 940 4960]
pivo=M(1,1)
m21=M(2,1)/pivo
m31=M(3,1)/pivo
m41=M(4,1)/pivo
M(2,:)=M(2,:)-m21*M(1,:)
M(3,:)=M(3,:)-m31*M(1,:)
M(4,:)=M(4,:)-m41*M(1,:)
pivo=M(2,2)
m32=M(3,2)/pivo
m42=M(4,2)/pivo
M(3,:)=M(3,:)-m32*M(2,:)
M(4,:)=M(4,:)-m42*M(2,:)
pivo=M(3,3)
m43=M(4,3)/pivo
M(4,:)=M(4,:)-m43*M(3,:)
%Numero de filas no nulas es igual a 4
%El rango de la matriz es igual a 4.
```

P4

Introduzca la siguiente matriz en MatLab y con el comando **rref** determine la forma escalonada reducida.

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -3 & -1 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 & -2 & -5 & 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Luego halle el rango de la matriz P. Compare el resultado utilizando el comando **rank** de MatLab.

Solución

```
P=[3 -1 0 -1 -3 -1 -2 -3;-2 0 0 0 2 0 2 2;3 0 0 -1 -1 -2 -1 -1;...
    0 0 0 1 -2 2 -2 -2;3 1 0 0 -1 -1 -2 -1; 1 -4 0 -2 -5 0 -1 -5]
EReduP=rref(P)
%Numero de filas no nulas es igual a tres
rangoP=rank(P)
```

1.6.4. Área de un triángulo

Sea R el triángulo con vértices en $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ y $(x_3; y_3)$. El área del triángulo (S) se calcula mediante la fórmula:

$$S = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}\right|$$

Preguntas

P1

Si las coordenadas en metros fueron medidas: $x_1 = 2,\ y_1 = 4,\ x_2 = 6,\ y_2 = 2,\ x_3 = 4$ y $y_3 = 5$, determine el área del triángulo.

Solución

```
x=[2 6 4]'
y=[4 2 5]'
M=[x y ones(3,1)]
S=(1/2)*abs(det(M))
```

P2

Explicar por qué el siguiente determinante

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 19 \end{bmatrix}$$

es igual a cero.

P3

Si $B = M^{-1}AM$
Explicar por qué se cumple:

- $det(B) = det(A)$
- $det(A^{-1}B) = 1$

Solución
$det(B) = det(M^{-1}AM) = det(M^{-1})det(A)det(M) = \frac{1}{det(M)}det(A)det(M) = det(A)$
$det(A^{-1}B) = det(A^{-1})det(B) = det(A^{-1})det(A) = 1$

P4

Aplicando propiedades, halle el siguiente determinante:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 2 \\ -2 & -4 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución:

```
A=[0 1 3 -1;2 4 -6 1;0 3 9 2;-2 -4 1 -3]
%Sea M=A
%Aplicando propiedades
M(4,:)=M(4,:)+M(2,:)   %det(A)=det(M)
M([1 2],:)=M([2 1],:) % det(A)=-det(M)
M(3,:)=M(3,:)-3*M(2,:)  %det(A)=-det(M)
M([3 4],:)=M([4 3],:) %det(A)=-(-det(M))=det(M)
%M es una matriz triangular superior
%det(M)=2*1*(-5)*5=det(A)
%Por lo tanto det(A)=-50
```

1.7. Ejercicios propuestos

1. Encontrar las matrices U y V,

$$V = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

y

$$U = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Para $A = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, hallar A^2, A^3 y A^{10}

3. Dado $P(x) = x^2 - 2x - 2$, encontrar $P(A)$, para $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

4. Sea la siguiente matriz P de orden $m \times n$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -1 \\ -1 & m & 3 & b \\ 1 & -1 & n & -2 \end{bmatrix}$$

   Se crea una matriz cuadrada Q simétrica con las columnas 2, 3 y 4 de P, manteniendo el orden original de las mismas.

   Determine el valor de $q_{12} + q_{23} + q_{32}$ de la matriz Q.

5. Determine el valor de verdad (V o F). Existe una matriz A NO nula de orden 2×2 tal que $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. Determine el valor de verdad (V o F). Si $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ entonces el determinante de $A \times B$ es igual a cero.

7. Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & a^2 - 5 & a \end{bmatrix},$$

   llévela a su forma escalonada. Luego determine para qué valores de a el rango de la matriz es igual a 2.

8. Dada la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & a + 3 \\ 2 & 1 & 5 & 2a + 3 \\ 8 & 10 & 17 & 7a - 3 \end{bmatrix},$$

lleve a su forma escalonada. Luego, determine para qué valores de a el rango de la matriz es igual a 2.

9. Determine el(los) valor(es) de k tal que la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} k-2 & 3 \\ -3 & k-2 \end{bmatrix}$$

sea no invertible.

10. Determine el valor de verdad (V o F). La matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & s & 2 \end{bmatrix}$ tiene inversa si $s \neq \frac{5}{4}$.

2. Sistemas de ecuaciones lineales

2.1. Definiciones generales

2.1.1. Introducción

Las soluciones de sistemas lineales son probablemente la aplicación más grande de la teoría de matrices. En efecto, la mayoría de las ciencias e ingenierías que tienen la necesidad de resolver problemas de varias variables lo hacen a través de un sistema de ecuaciones lineales.

2.1.2. Representación de un sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales tiene la forma:

Forma algebraica

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde $x_1, x_2, \ldots x_n$ son las variables por determinar y $a_{ij},\ b_j$ son constantes dadas.

Forma matricial

$$A_{m\times n}x_{n\times 1} = b_{m\times 1}$$

con $A = [a_{ij}]_{m\times n}$; $\quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$; $\; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

La matriz formada por A y b conjuntamente, es decir:

$$[A \mid b] = Aa = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

se llama matriz ampliada del sistema y se representa por $[A \mid b]$ o bien Aa.

Ejemplo

El sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=5 \\ x+y=7 \\ 2x+2y-z=12 \end{array}\right\}$$

escrito matricialmente es:

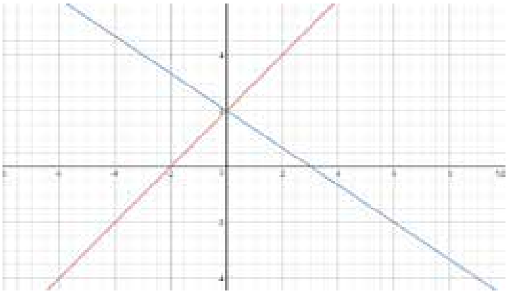
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

y la matriz ampliada es:

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & -1 & 12 \end{array}\right]$$

Ejemplo

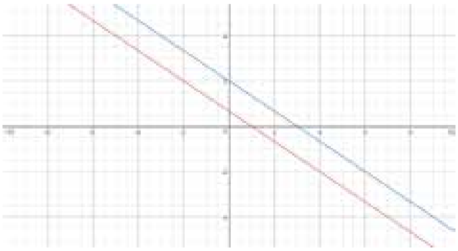
Encontrar el punto de intersección de las rectas
$x-y=-2$; $\;2x+3y=6$

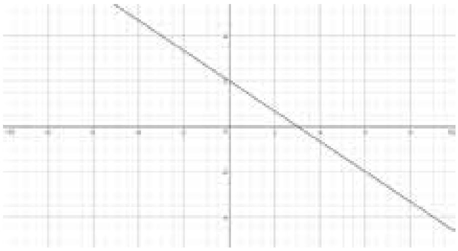


Ejemplo

Encontrar el punto de intersección (si es posible) de las rectas

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + 6y = 12 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$





2.1.3. Operaciones elementales

Las operaciones elementales sobre las filas de una matriz pueden clasificarse en tres tipos:

1. **Intercambio de filas:** cambiar la posición de dos filas en la matriz. Se denota por $f_i \longleftrightarrow f_j$, que indica que las filas i y j se intercambian entre sí.

2. **Multiplicación de una fila por una constante:** multiplicar todos los elementos de una fila por una constante no nula ($\lambda \neq 0$). Se denota por $f_i \to \lambda f_i$, que significa que la fila i se multiplica por λ.

3. **Adición de un múltiplo de una fila a otra:** sumar a una fila el múltiplo de otra fila. Se denota por $f_i \to f_i + \lambda f_j$, que indica que a la fila i se le suma el múltiplo λ de la fila j.

Ejemplo

Dada la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$
realice las siguientes operaciones elementales:

1. Intercambiar las filas 1 y 3.
2. Multiplicar la fila 2 por 2.
3. Sumar el doble de la fila 3 (de la matriz original) a la fila 1.

Solución

Dada la matriz original A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Realizamos las siguientes operaciones elementales sobre A:

1. Intercambiar las filas 1 y 3, notación: $f_1 \longleftrightarrow f_3$.

$$A_{\text{op1}} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Multiplicar la fila 2 por 2, notación: $f_2 \to 2f_2$.

$$A_{\text{op2}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 8 & 4 & 14 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Sumar el doble de la fila 3 (original) a la fila 1, notación: $f_1 \to f_1 + 2f_3$.

$$A_{\text{op3}} = \begin{bmatrix} 5 & 13 & 9 \\ 4 & 2 & 7 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Cada operación se realiza de manera independiente, utilizando como referencia la matriz original A.

2.2. Resolución de un sistema de ecuaciones lineales

Sea $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ un sistema de m ecuaciones lineales en las variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Se dice que $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in M_{n\times 1}$ es una solución del sistema si se verifica $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$.

2.2.1. Tipos de sistemas de ecuaciones lineales

- **Sistema compatible determinado:** sistema que tiene una única solución.
- **Sistema compatible indeterminado:** sistema que tiene solución pero que no es única.
- **Sistema incompatible:** sistema que no tiene solución.

2.2.2. Teorema de Rouché-Frobenius

Se dice que un sistema de ecuaciones es compatible si el rango de la matriz del sistema es igual al rango de la matriz ampliada y decimos que es incompatible en caso contrario.

Rouché-Frobenius

Considere el sistema de ecuaciones en su forma matricial $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$

$$\text{Sistema compatible} \begin{cases} \textbf{Compatible determinado} \\ \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|\boldsymbol{b}) = n \\ \textbf{Compatible indeterminado} \\ \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|\boldsymbol{b}) < n \end{cases}$$

$$\text{Sistema incompatible} \begin{cases} \textbf{No tiene solución} \\ \operatorname{rang}(A) \neq \operatorname{rang}(A|\boldsymbol{b}) \end{cases}$$

Ejemplo

Estudiemos el sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + 3z = 2 \\ 3x + 2y + 5z = 3 \end{cases}$$

Solución
Observamos que

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right].$$

Ahora calculamos simultáneamente el rango de las matrices A y $[A \mid b]$ por medio de operaciones elementales.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Así que $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}([A \mid b]) = 2 < 3$. Por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Ejemplo

Dada la matriz aumentada $[A \mid b]$ que representa un sistema de ecuaciones $Ax = b$; después de aplicar operaciones elementales, obtenemos:

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & a^2-5 & a \end{array}\right] \xrightarrow[f_3 \to f_3 - f_1]{f_2 \to f_2 - f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right].$$

Determine para qué valores de a el sistema tiene infinitas soluciones.

Solución
Para que el sistema tenga infinitas soluciones se debe tener:

$$a^2 - 4 = 0 \text{ y } a - 2 = 0$$

Es decir: $a = 2$

Ejemplo

Considere el siguiente sistema $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \\ 14/5 \end{bmatrix}$, sin resolverlo.
¿Se podría afirmar que el sistema tiene solución única?

Solución

Consideremos la matriz ampliada asociada al sistema y llevémosla a su forma escalonada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 14/5 \end{array}\right] \xrightarrow[f_2 \to f_2 - f_1 - f_3]{f_4 \to 5f_4} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow[f_4 \to f_4 - 2f_1 - f_3]{\cdot} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[f_2 \leftrightarrow f_3]{\cdot} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[f_1 \to f_1 - 2f_2]{\cdot} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[f_2 \leftrightarrow f_1]{\cdot} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Cuando el rango de la matriz de coeficientes es igual al de su matriz ampliada e igual al número de variables, por el teorema de Rouché-Frobenius, decimos que el sistema tiene solución única.

2.3. Espacio nulo de una matriz

Definición

El espacio nulo de una matriz A de orden $m \times n$ denotado como $N(A)$ es el conjunto de todas las soluciones del sistema lineal homogéneo $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$.

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \quad / \; Ax = 0\}$$

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ y sea $u = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, determine si u pertenece al espacio nulo de A.

Solución

Verificando que u pertenece a $N(A)$: $Au = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2.4. Condicionamiento de una matriz

Definición

El *condicionamiento* de una matriz A, denotado por cond(A), mide qué tan sensible es la respuesta a los cambios en los datos de entrada y los errores de redondeo después del proceso de solución del sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

- En MatLab, la función **cond()** permite calcular el condicionamiento de una matriz.
- Para cualquier matriz A, $\text{cond}(A) \geq 1$.
- Si $\text{cond}(A) \approx 1$, la matriz A está bien condicionada.

Ejemplo

Si $A = \begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix}$ entonces la matriz está mal condicionada, pues

$$\text{cond}(A) = 1623$$

Ejemplo

Considere el sistema de ecuaciones lineales $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$

$$A = \begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix}.$$

La solución única al sistema es: $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ahora, adicionamos 0.01 a la primera componente de $\boldsymbol{b}$, es decir $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4.11 \\ 9.7 \end{bmatrix}$, tenemos como solución: $x = \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.97 \end{bmatrix}$

La solución cambia dramáticamente.

Esta sensibilidad de la solución x a los cambios en el lado derecho b es un reflejo del número de condicionamiento de la matriz A.

2.5. Eliminación gaussiana

2.5.1. Método de eliminación gaussiana sin pivoteo

Definición

El método consiste de dos etapas:

- **Eliminación hacia adelante**: el sistema es reducido a una forma triangular superior. Se usa una secuencia de operaciones elementales.
- **Sustitución regresiva**: resuelve el sistema empezando por la última variable.

Consideremos el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, donde $\boldsymbol{A}$ es una matriz de orden $m \times n$ y $\boldsymbol{b}$ es un vector columna $m \times 1$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Luego, tenemos la matriz aumentada $\boldsymbol{Aa}$:

$$\boldsymbol{Aa} = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

El método de eliminación gaussiana simplifica sistemas de ecuaciones lineales, transformando la matriz aumentada hacia una forma escalonada a través de operaciones elementales.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \tilde{a}_{ii} & \cdots & \tilde{a}_{in} & \tilde{b}_i \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \tilde{a}_{nn} & \tilde{b}_n \end{array}\right]$$

Primer paso de eliminación

1. **Seleccionar el primer pivote:** se elige a_{11} como el primer pivote, suponiendo que es diferente de cero. Si a_{11} es cero, se busca una fila por debajo de la primera fila donde el elemento en la primera columna no sea cero y se intercambien las filas.

2. **Obtener ceros bajo el pivote:** para cada fila i de 2 a m se realizan operaciones elementales por fila para obtener ceros bajo el pivote a_{11}. La operación para transformar el elemento a_{i1} en cero es:

$$f_i \longrightarrow f_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} f_1,$$

donde f_i representa la i-ésima fila de la matriz aumentada. Esta operación no solo afecta a la columna donde se está trabajando para introducir el cero, sino a todas las columnas de la fila, incluyendo el lado de los términos independientes b.

El resultado de este primer paso será una matriz aumentada donde todos los elementos debajo del pivote en la primera columna serán ceros.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & \tilde{a}_{22}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{2n}^{(1)} & \tilde{b}_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{m2}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{mn}^{(1)} & \tilde{b}_m^{(1)} \end{array}\right]$$

Luego, el proceso se repite para el siguiente pivote después de reordenar las filas (si es necesario), aplicando el mismo método para obtener ceros debajo de este nuevo pivote, y así sucesivamente para cada columna hasta alcanzar la forma escalonada.

Segundo paso (sustitución regresiva)

1. Resolver el sistema equivalente correspondiente a la matriz aumentada escalonada mediante sustitución regresiva para encontrar las soluciones del sistema de ecuaciones lineales.

Ejemplo

Resolver el sistema de ecuaciones lineales:
$3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 3$
$-2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1$
$2x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 0$
utilizando el método de eliminación gaussiana.

Solución

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 6 & -9 & 3 \\ -2 & -3 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -8 & 0 \end{array}\right]$$

Realizamos las siguientes operaciones de fila:

$$f_2 \to f_2 + \left(-\frac{2}{3}\right) f_1$$
$$f_3 \to f_3 + \left(\frac{2}{3}\right) f_1$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

$x_3 = 1; x_2 = 3; x_1 = -2$

Ejemplo

Producción de computadoras. Una compañía dedicada a la electrónica se encarga de fabricar transistores, resistores y chips de computadora. Para producir cada transistor se requieren 4 unidades de cobre, 1 de zinc y 2 de vidrio, mientras que cada resistor necesita 3 unidades de cobre, 3 de zinc y 1 de vidrio. Por otro lado, la elaboración de cada chip demanda 2 unidades de cobre, 1 de zinc y 3 de vidrio, tal como se detalla en la siguiente tabla. Cabe mencionar que los suministros de estos materiales varían semana a semana, por lo que la empresa debe determinar una corrida de producción semanal. A modo de ejemplo, en una semana específica las cantidades disponibles de materiales fueron 960 unidades de cobre, 510 unidades de zinc y 610 unidades de vidrio.

Componente	Cobre	Zinc	Vidrio
Transistores	4	1	2
Resistores	3	3	1
Chips de computadora	2	1	3

1. Si $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ denota las cantidades de transistores, resistores y chips de computadora respectivamente, formule un sistema de ecuaciones lineales en forma matricial $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, cuya solución permita determinar la producción de la semana.

2. Resuelva el sistema planteado utilizando eliminación gaussiana (indique paso a paso las operaciones elementales realizadas).

Solución

Se sabe que $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ denota las cantidades de transistores, resistores y chips de computadora. A partir de ello planteamos las siguientes ecuaciones:

- Zinc: $x_1 + 3x_2 + x_3 = 510$

- Cobre: $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 960$

- Vidrio: $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 610$

Llevándolo a la forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 510 \\ 960 \\ 610 \end{bmatrix}$$

Consideremos la matriz ampliada asociada al sistema y llevémosla a su forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 510 \\ 4 & 3 & 2 & | & 960 \\ 2 & 1 & 3 & | & 610 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_2 \to f_2 - 4f_1]{f_3 \to f_3 - 2f_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 510 \\ 0 & -9 & -2 & | & -1080 \\ 0 & -5 & 1 & | & -410 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_2 \to -f_2/9]{f_3 \to -f_3/5} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 510 \\ 0 & 1 & 2/9 & | & 120 \\ 0 & 1 & -1/5 & | & 82 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3 \to f_3 - f_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 510 \\ 0 & 1 & 2/9 & | & 120 \\ 0 & 0 & -19/45 & | & -38 \end{bmatrix}$$

Resolviendo, tenemos:

$$x = 120, \quad y = 100, \quad z = 90$$

2.5.2. Método de eliminación gaussiana con pivoteo

Formas conceptuales de errores

Elección del pivote: minimiza los errores de redondeo.

- Si un pivote es cero se intercambian dos filas.
- Si todos los pivotes restantes son ceros la matriz es singular (es decir, el sistema de ecuaciones no admite solución única).

Para minimizar el error de redondeo elegimos el pivote más grande posible (en valor absoluto) y entonces intercambiamos las filas, esta es la estrategia de pivote máximo (método de eliminación gaussiana con pivoteo).

- Pequeños errores son introducidos en cada operación aritmética.
- Cuando los elementos pivotales son muy pequeños, los multiplicadores podrían ser muy grandes.
- Para reducir el error, se realizan intercambios de filas para maximizar la magnitud del elemento pivotal.

Caso: Sin pivoteo

Aritmética de 4 dígitos $\begin{bmatrix} 1.133 & 5.281 \\ 24.14 & -1.210 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.414 \\ 22.93 \end{bmatrix}$

$$m_{21} = \frac{24.14}{1.133} = 21.31 \qquad \begin{bmatrix} 1.133 & 5.281 \\ 0.000 & -113.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.414 \\ -113.8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9956 \\ 1.001 \end{bmatrix}$$

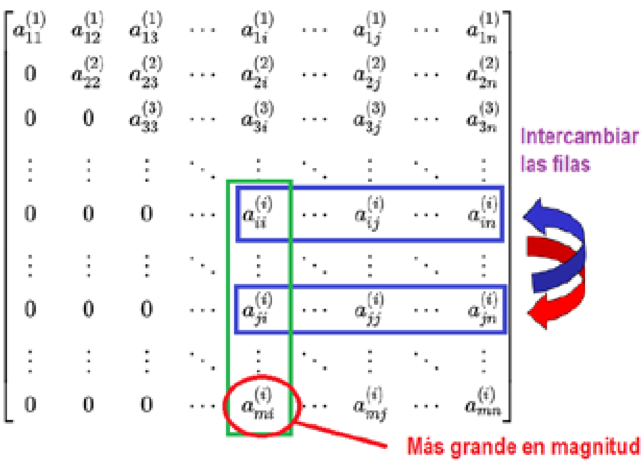
Pérdida de significancia

Caso: Con pivoteo

$$\begin{bmatrix} 24.14 & -1.210 \\ 1.133 & 5.281 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.93 \\ 6.414 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{1.133}{24.14} = 0.04693 \qquad \begin{bmatrix} 24.14 & -1.210 \\ 0.000 & 5.338 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.93 \\ 5.338 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.000 \end{bmatrix}$$



Ejemplo

En la etapa k escoger para el pivote el elemento de mayor valor absoluto entre a_{ik}, $i = k, k+1, \ldots, n$;
Para $n = 4$, $k = 2$, tenemos $\max_{i\geq 2} |a_{i2}| = 3$
$\longrightarrow$ pivote$=a_{32} = -3$

$$[A^{(1)} \mid b^{(1)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right]$$

$$[A^{(1)} \mid b^{(1)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right]$$

Ejemplo

Use la eliminación de Gauss con pivoteo para resolver el sistema de ecuaciones:
$2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 5$
$4x_1 - 6x_2 = -2$
$-2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 9.$

Solución

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right] \overset{f_1 \leftrightarrow f_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right]$$

$$\overset{f_2 \longrightarrow f_2 - (1/2) f_1, f_3 \longrightarrow f_3 + (1/2) f_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

$$\overset{f_3 \longrightarrow f_3 - f_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Así: $x_3 = 2$.
Entonces: $4x_2 + x_3 = 6$, obtenemos $x_2 = 1$.
Finalmente: $4x_1 - 6x_2 = -2$, así $x_1 = 1$.
Por lo tanto: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ es la solución (única) del sistema de ecuaciones lineales.

2.6. Cifras significativas

2.6.1. Conceptos generales

Las cifras significativas de un número son aquellas que pueden utilizarse de manera confiable para representar una cantidad.
Es relevante destacar que los ceros no siempre se consideran cifras significativas, puesto que pueden emplearse para ubicar el punto decimal.

Ejemplo:

(*a*) 0.00001845

(*b*) 0.0001845

(*c*) 0.001845

(*d*) 0.0000180

Los apartados a, b y c tienen cuatro cifras significativas, donde el número 1 es la primera cifra significativa, el 8 es la segunda cifra significativa, el 4 es la tercera cifra significativa y el 5 es la cuarta. El apartado d tiene tres cifras significativas: 1, 8 y 0.
Por otro lado, el número 45300 puede tener 3, 4 o 5 cifras significativas, según los ceros que se conocen con exactitud. Luego, se puede representar esta cantidad utilizando la notación científica normalizada:

- 0.453×10^5, tres cifras significativas.
- 0.4530×10^5, cuatro cifras significativas.
- 0.45300×10^5, cinco cifras significativas.

Definición

Sean A y a dos números reales, con $A \neq 0$. Se dice que a es una aproximación de A con t cifras significativas, si t es el mayor entero no negativo tal que:

$$\frac{|A-a|}{|A|} \leq 5 \times 10^{-t}.$$

Ejemplo

Verificar que $a = 124.45$ aproxima a $A = 123.45$ con dos cifras significativas.

Solución

$$\frac{|A-a|}{|A|} = \frac{1}{123.45} = 8.1004 \times 10^{-3}$$
$$= 0.81004 \times 10^{-2} < 5 \times 10^{-2}$$

Por lo tanto, se verifica que a se aproxima a A con dos cifras significativas.

2.7. Aplicaciones con MatLab

2.7.1. Funciones de MatLab para SEL

Funciones de MatLab

Función	Descripción
linsolve (A, b)	Halla todas las soluciones de: $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$
A\b	Halla todas las soluciones de: $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$
inv(A)*b	Halla todas las soluciones de: $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$

Ejemplo

Considere el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Resolver con una sola línea de código.

b) Determine el rango de la matriz A y de la matriz aumentada $[A|\boldsymbol{b}]$.

Solución:

```
clc
% Ingresando la Matriz A
A=[1 2 -3;-3 -1 -1;1 -1 1]
% Ingresando vector columna b
b=[5 ;-8; 0]
%Resolviendo Ax=b
x=linsolve(A,b)
%Otra forma de resolver
x=A\b
%Otra forma de resolver
x=inv(A)*b
```

```
% Matriz Aumentada Aa
Aa=[A b]
% Hallando los rangos
rA= rank(A)
rAb= rank(Aa)
```

2.7.2. Rouché-Frobenius en MatLab

Ejemplo

Implemente una función en MatLab que determine si el sistema $Ax = b$ tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución (sugerencia: utilice el teorema de Rouché-Frobenius).

Solución

```
function []=RoucheFrobenius(A,b)
[m,n]=size(A);
Aa=[A b];
RangA=rank(A);
RangAa=rank(Aa);
if (RangAa ~= RangA)
    fprintf('El sistema no tiene solucion \n')
elseif (RangA==n)
    fprintf('El sistema tiene solucion unica \n')
else
    fprintf('El sistema tiene infinitas soluciones\m')
end
end
```

2.7.3. SEL Caso: Sector agropecuario

El sector agrícola holandés y el complejo agroalimentario acumularon más de 36 mil millones de florines en producción bruta en 1992, lo que representa 17,4 mil millones de valor agregado bruto y casi 13 mil millones de dólares en valor neto ganado después de restar la adquisición de equipos de producción, la depreciación, y los impuestos y otras tarifas. Por este motivo, un granjero quiere elaborar una fórmula alimenticia para alimentar a su ganado, para ello deberá **modelar un sistema de ecuaciones lineales**. Existen tipos de alimentos, como el maíz, los desperdicios, la alfalfa y la cebada. Cada uno de estos alimentos contiene ciertas cantidades de nutrientes específicos que los componen, de acuerdo con el cuadro 2.1.

Cuadro 2.1: Unidades de ingredientes nutritivos por kg de cada alimento disponible

Ingrediente nutritivo	ALIMENTO Maíz	Desperdicio	Alfalfa	Cebada	Requerimiento diario Unidades / kg
Carbohidrato	80	15	35	60	230
Proteína	28	72	57	25	180
Vitaminas	20	20	12	20	80
Celulosa	50	10	20	60	160
Costo $	18	5	7	20	–

Preguntas

P1

Modele un sistema de ecuaciones lineales con 4 incógnitas de la forma $Px = q$, donde el vector columna x representa los kilogramos necesarios de cada ingrediente (en el orden y numéricamente igual al presentado en la tabla) para satisfacer en su totalidad el requerimiento diario. Dé como respuesta la traza de la matriz P.

Solución

Forma algebraica:

$$\begin{aligned}
80x_1 + 15x_2 + 35x_3 + 60x_4 &= 230\\
28x_1 + 72x_2 + 57x_3 + 25x_4 &= 180\\
20x_1 + 20x_2 + 12x_3 + 20x_4 &= 80\\
50x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 60x_4 &= 160
\end{aligned}$$

Forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 80 & 15 & 35 & 60 \\ 28 & 72 & 57 & 25 \\ 20 & 20 & 12 & 20 \\ 50 & 10 & 20 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 230 \\ 180 \\ 80 \\ 160 \end{bmatrix}$$

```
P=[80 15 35 60;28 72 57 25;20 20 12 20;50 10 20 60]
q=[230;180;80;160]
x=linsolve(P,q) %Resuelve el sistema Px=q
traz=trace(P)
```

P2

- Determine si el sistema $Px = q$ tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución (sugerencia: utilice la función creada: **RoucheFrobenius**).
- Resuelva el sistema de ecuaciones lineales si es compatible determinado.

Solución

```
RoucheFrobenius(P,q)
```

P3

Determine el costo de la mezcla.

Solución

```
costo=[18 5 7 20]
costo_mezcla=costo*x
%Otra forma
costo_mezcla=sum(costo.*x')
%otra forma
costo_mezcla=dot(costo,x')
```

P4

Otro granjero decide optimizar la fórmula original agregando 2 alimentos de tipos A y B. Estos nuevos alimentos contienen: proteína, vitaminas, calcio y sales minerales.
El de tipo A solo contiene:

- Proteína, 50 % más que lo que contiene el maíz.
- Calcio, una proporción equivalente al de carbohidrato que contiene la alfalfa.
- 25 unidades por kg en sales minerales.

El de tipo B solo contiene:

- Vitaminas, un 5 % más que lo que contiene la cebada.

- Calcio, una proporción equivalente de proteína que contiene la cebada.
- 30 unidades por kg en sales minerales.

Solución

```
Q=[80 15 35 60 0 0;28 72 57 25 42 0;20 20 12 20 0 21;...
    50 10 20 60 0 0;0 0 0 0 35 25;0 0 0 0 25 30 ]
r=[400;660;220;260;120;120]
RoucheFrobenius(Q,r)
x=linsolve(Q,r)
```

P5 (Propuesto)

Estos nuevos productos aplican nuevos requerimientos diarios de ingredientes nutritivos.
Complete la siguiente tabla con los datos mencionados.

Ingrediente nutritivo	Maíz	Desperdicio	Alfalfa	Cebada	A	B	Requer.\ d Unid. \ kg
Carbohidrato	80	15	35	60	—	—	400
Proteína	28	72	57	25	?	—	660
Vitaminas	20	20	12	20	—	?	220
Celulosa	50	10	20	60	—		260
Calcio	—	—	—	—	?	?	120
Sales minerales	—	—	—	—	?	?	120

2.7.4. Espacio nulo en MatLab

Ejemplo

Determine si el vector $w = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ está en el espacio nulo de la siguiente matriz: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{bmatrix}$

Solución

```
A=[2 -1 3 ;4 -2 6;-6 3 -9]
w=[-2;-1;1]
if A*w==0
fprintf('w pertenece al espacio nulo de A \n')
else
fprintf('No pertenece al espacio nulo de A \n')
end
```

2.7.5. Condicionamiento de una matriz en MatLab

Considere el sistema de ecuaciones lineales $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$

$$A = \begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

La solución única del sistema es: $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

```
A = [4.1 2.8; 9.7 6.6]
b = [4.1;9.7]
x = A\b
```

Ahora, adicionamos 0.01 a la primera componente de b, es decir $b = \begin{bmatrix} 4.11 \\ 9.7 \end{bmatrix}$

```
b2 = [4.11; 9.7]
```

Tenemos como solución: $x = \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.97 \end{bmatrix}$

```
x2 = A\b2
```

La solución cambia dramáticamente.
Esta sensibilidad de la solución x a los cambios en el lado derecho b es un reflejo del número de condicionamiento de la matriz A.

```
 k = cond(A)
```

2.7.6. Eliminación gaussiana sin pivoteo en MatLab

Ejemplo

Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \tag{2.1}$$
$$-3x_1 - x_2 - x_3 = -8 \tag{2.2}$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \tag{2.3}$$

Encuentre la solución utilizando eliminación gaussiana sin pivoteo.

Solución

```
%Forma Matricial: AX=b
clc
A=[1 2 -3;-3 -1 1;1 -1 1]
b=[5;-8;0]
%Matriz ampliada
Aa = [A b]
%Paso 1
pivo=Aa(1,1)
%multiplicadores
m21=Aa(2,1)/pivo
m31=Aa(3,1)/pivo
Aa(2,:)=Aa(2,:)-m21*Aa(1,:)
Aa(3,:)=Aa(3,:)-m31*Aa(1,:)
pivo=Aa(2,2)
m32=Aa(3,2)/pivo
Aa(3,:)=Aa(3,:)-m32*Aa(2,:)
Ea=Aa(:,1:3)
nb=Aa(:,4)
%Sustitucion Regresiva
x(3)=nb(3)/Ea(3,3)
x(2)=(nb(2)-Ea(2,3)*x(3))/Ea(2,2)
x(1)=(nb(1)-Ea(1,2)*x(2)-Ea(1,3)*x(3))/Ea(1,1)
```

Algoritmo

Result: Algoritmo

1. Leer $A_{m\times n}$ y $b_{m\times 1}$
2. $Aa \leftarrow [A\ b]$
3. Desde $k = 1$ hasta $n-1$
   3.1 pivo $\leftarrow$ Aa(k,k)
   3.2 Desde j=k+1 hasta m
      3.2.1 $m_{jk} \leftarrow Aa(j,k)/pivo$
      3.2.2 fila(Aa_j) $\leftarrow$ fila(Aa_j)-$m_{jk}\times$ fila(Aa_k)
4. [Ea, nb] $\leftarrow$ [A b]
5. Salida Ea y nb

Implementación

```
function [Ea,nb]=gauss(A,b)
[m,n]=size(A);
Aa=[A b];
for k=1:n-1
    pivo=Aa(k,k);
    for j=k+1:n
        mjk=Aa(j,k)/pivo;
        Aa(j,:)=Aa(j,:)-mjk*Aa(k,:);
    end
end
Ea=Aa(:,1:n);
nb=Aa(:,n+1);
end
```

Sustitución regresiva

Result: Algoritmo

1. Leer $U_{n\times n}$ y $b_{n\times 1}$
2. Desde $i = n$ hasta 1
   2.1 $x(i) \leftarrow \frac{1}{u_{ii}}(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} U_{ij}x_j)$
3. Salida x

Implementación

```
function [x]=sustireg(U,b)
% U: Matriz triangular superior
[m,n]=size(U);
x=zeros(n,1);
for k=n:-1:1
    x(k)=(b(k)- U(k,k+1:n)*x(k+1:n))/U(k,k);
end
end
```

2.7.7. Eliminación gaussiana con pivoteo en MatLab

Eliminación Gaussiana con pivoteo

Result: Algoritmo

1. Leer $A_{m\times n}$ y $b_{m\times 1}$
2. $Aa \leftarrow [A\ b]$
3. Desde $k=1$ hasta $n-1$
   - 3.1 Encontrar r_k tal que $|Aa_{r_k,k}| = max_{k\leq i\leq n}|Aa_{i,k}|$.
     Si $Aa_{r_k,k}=0$, entonces parar, en caso contrario continuar.
   - 3.2 fila($Aa_{k,j}$) $\leftrightarrow$ fila($Aa_{r_k,j}$)
   - 3.3 pivo $\leftarrow$ Aa(k,k)
   - 3.4 Desde j=k+1 hasta m
     - 3.4.1 $m_{jk} \leftarrow Aa(j,k)/pivo$
     - 3.4.2 fila(Aa_j) $\leftarrow$ fila(Aa_j)-$m_{jk}\times$ fila(Aa_k)
4. [Ea, nb] $\leftarrow$ [A b]
5. Salida Ea y nb

Implementación

```
function [Ea,nb]=gausspivo(A,b)
[m,n]=size(A);
Aa=[A b];
%Los pasos
for k=1:n-1
    [maxi,pos]=max(abs(Aa(k:n,k)))
    Aa([k+pos-1 k],:)=Aa([k k+pos-1],:)
    pivo=Aa(k,k);
    for j=k+1:m
        mjk=Aa(j,k)/pivo;
        Aa(j,:)=Aa(j,:)-mjk*Aa(k,:)
```

```
    end
end
Ea=Aa(:,1:n);
nb=Aa(:,n+1);
end
```

Ejemplo

Considere el siguiente sistema de ecuaciones $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, expresado en su forma algebraica:

$$60x_1 + 30x_2 + 20x_3 = 180$$
$$30x_1 + 20x_2 + 15x_3 = 115$$
$$20x_1 + 15x_2 + 12x_3 = 86$$

1. Halle la forma matricial del sistema.

2. Resuelva el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ utilizando las funciones **gauss.m**,**gausspivo.m** y **sustireg.m**.

Solución

Utilizando la función gauss:

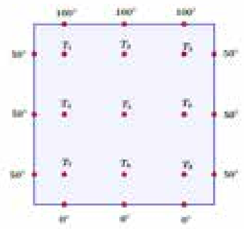
```
A=[60 30 20;30 20 15;20 15 12]
b=[180;115;86]
[Ea,nb]=gauss(A,b)
x=sustireg(Ea,nb)
```

Utilizando la función gausspivo:

```
A=[60 30 20;30 20 15;20 15 12]
b=[180;115;86]
[Ea,nb]=gausspivo(A,b)
x=sustireg(Ea,nb)
```

2.7.8. SEL Caso: Placa de temperatura

Se tiene una placa rectangular cuyos bordes se mantienen a una temperatura determinada. El objetivo es encontrar la temperatura en los puntos interiores. Considere el siguiente diagrama. Se deben encontrar aproximaciones para las temperaturas T_1 a T_9, es decir, la temperatura de los puntos intermedios. Suponga que la temperatura en un punto interior es el promedio de la temperatura de los cuatro puntos que lo rodean: arriba, a la derecha, abajo y a la izquierda.



a) Modele el sistema de ecuaciones en su forma algebraica, indicando las variables.

b) Verifique que el sistema de ecuaciones tiene solución única utilizando el teorema de Rouché-Frobenius.

c) Resuelva el sistema de ecuaciones utilizando la eliminación gaussiana con pivoteo e indique todos los resultados parciales.

2.8. Ejercicios propuestos

1. Considere el siguiente sistema $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \\ 14/5 \end{bmatrix}$, sin resolverlo. ¿Se podría afirmar que el sistema tiene solución única? Justifique su respuesta.

2. Verifique que el siguiente sistema es compatible determinado, luego resuelva:
$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 0 \\ 3x - y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

3. Dada la siguiente matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix},$$
verifique que, si el vector $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ pertenece al espacio nulo de A, entonces los componentes del vector x satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 &= 0 \\ x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

4. Dada la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix},$$

verifique que el vector $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$ pertenece al espacio nulo de A.

5. Dada la siguiente matriz

$$\begin{cases} x + y &= 2 \\ x + 1.001y &= 2\,, \end{cases}$$

halle el condicionamiento de la matriz de coeficientes.

6. Consideremos los sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y &= 2 \\ x + 1.001y &= 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x + y &= 2 \\ x + 1.001y &= 2.001 \end{cases}$$

¿La matriz de coeficientes está mal condicionada? Justifique su respuesta.

7. La circunferencia dada por la ecuación $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ pasa por los puntos $(-2, 0)$, $(-1, 7)$ y $(5, -1)$. Encuentre a, b y c. Utilice la eliminación gaussiana.

8. Utilice la eliminación gaussiana con pivoteo para encontrar la solución para el sistema de ecuaciones

$$2x + 5y = 9$$

$$x + 2y - z = 3$$

$$-3x - 4y + 7z = 1$$

3. Factorización

3.1. Definiciones generales

3.1.1. Introducción

El proceso de factorización de una matriz cuadrada A consiste en determinar dos matrices triangulares L y U, tales que $A = LU$, donde: L es la matriz triangular inferior (*lower*) y U, la matriz triangular superior (*upper*).
Es un hecho conocido que los sistemas de ecuaciones cuyas matrices tienen alguna estructura especial, como, por ejemplo, triangular superior o triangular inferior, son muy fáciles de resolver.
Veamos el caso, dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 9 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ -50 \\ -28 \\ 80 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 6 & 0 \\ -7 & 6 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 1 \\ 71 \\ -5 \end{bmatrix}$$

El método se reduce a realizar una sustitución hacia atrás y otra sustitución hacia adelante, respectivamente.
Las matrices triangulares inferior y superior son muy importantes en una variedad de aplicaciones computacionales, pero en esta sección limitaremos nuestra atención a su uso para resolver sistemas lineales $\mathsf{Ax} = \mathsf{B}$.

3.1.2. Factorización LU

Factorización LU

Sea A una matriz $n \times n$. Si A se puede escribir como un producto $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$ donde L y U son matrices triangular inferior y triangular superior, respectivamente, entonces decimos que $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$ es una factorización LU de A.

Una factorización LU de una matriz A también se denomina descomposición LU de la matriz A.

$$\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}^{\text{A}} = \overbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}}^{\text{L}} \overbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}}^{\text{U}}.$$

3.2. Métodos de factorización

3.2.1. Método de Doolittle

En el método de Doolittle la matriz L contiene unos en la diagonal.

Forma de Doolittle

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Algoritmo de Doolittle

- El algoritmo consiste en reducir A a su forma escalonada U, empleando solo reemplazos de filas, que suman un múltiplo de una fila a otra situada debajo de la primera.
- Se concluye que las operaciones elementales por fila resumidas en $(E_p \times \cdots \times E_1)$ reducen la matriz A a U y también reducen L a $\mathbb{I}$, esto último es la clave para construir L.
- Finalmente, el algoritmo se reduce.

Algoritmo Algoritmo LU

Entrada: Una matriz A;

Salida: Matrices L y U tales que $A = L \times U$

1: Reduzca A a una forma escalonada U mediante una sucesión de operaciones de reemplazo de filas(siempre que sea posible)

2: Coloque las entradas de L de tal manera que la misma sucesión de operaciones por fila reduzca L a $\mathbb{I}$

3: retorna U y L

Ejemplo

Encuentre la factorización LU para la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 5 \\ -4 & -5 & 3 & -8 \\ 2 & -5 & -4 & 1 \\ -6 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución

- Reducimos A a su forma escalonada. Se muestra el proceso:

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & 4 & -2 & 5 \\ \boxed{-4} & -5 & 3 & -8 \\ \boxed{2} & -5 & -4 & 1 \\ \boxed{-6} & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & \boxed{3} & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-9} & -2 & -4 \\ 0 & \boxed{12} & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-5} & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 4 \end{bmatrix}$$

- Luego tomamos $U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

- Para L consideramos las columnas marcadas en el proceso para hallar U haciendo que la diagonal tenga como entrada el valor 1, obteniendo así:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Verifique que $L \times U = A$

3.2.2. Método de Crout

En el método de Crout la matriz U contiene unos en la diagonal.

Forma de Crout

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Algoritmo de Crout

- El algoritmo consiste en reducir A a su forma escalonada triangular inferior L, empleando solo reemplazos de columnas, que suman un múltiplo de una columna a otra, situada a continuación de la primera. Esto se traduce en la existencia de matrices elementales triangulares superiores unitarias $E_1, \cdots, E_p$ tales que:

$$A \times (E_1 \times \cdots \times E_p) = L$$

- Es decir: $A = L \times (E_1 \times \cdots \times E_p)^{-1} = L \times U$
- En consecuencia: $U = (E_1 \times \cdots \times E_p)^{-1}$
- Debido a que los productos e inversos de matrices triangulares superiores unitarias también resultan ser matrices triangulares superiores unitarias, se deduce claramente que la matriz U pertenece al grupo de matrices triangulares superiores unitarias.

Ejemplo

Encuentre la factorización LU mediante el método de Crout para la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 6 & 9 \\ 4 & 10 & 10 & 8 \\ 5 & 16 & 12 & 35 \\ 3 & 11 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$

Solución

- Reducimos la matriz A a su forma escalonada tringular inferior (realizando operaciones elementales por **columnas**). Se muestra el proceso:

$$\begin{bmatrix} \boxed{3} & \boxed{9} & \boxed{6} & \boxed{9} \\ 4 & 10 & 10 & 8 \\ 5 & 16 & 12 & 35 \\ 3 & 11 & 5 & 20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & \boxed{-2} & \boxed{2} & \boxed{-4} \\ 5 & 1 & 2 & 20 \\ 3 & 2 & -1 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & \boxed{3} & \boxed{18} \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

- Luego tomamos a la matriz obtenida en el proceso anterior como la matriz triangular inferior $L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
- En tanto para la matriz triangular superior U consideramos las filas marcadas en el proceso para hallar L haciendo que la diagonal finalmente tenga como entrada el valor 1, obteniendo así: $U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Verifique que $L \times U = A$

3.2.3. Algoritmo general de factorización LU

Dada la matriz A, al considerar la igualdad $A = L \times U$, es decir en componentes

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

obtenemos las matrices L y U aplicando el siguiente algoritmo genérico que se muestra a continuación. Para $k = 1, 2, \cdots, n$

$$\begin{aligned} L_{kk}U_{kk} &= a_{kk} - \sum_{r=1}^{k-1} L_{kr}U_{rk} \\ L_{ik} &= \frac{a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} L_{ir}U_{rk}}{U_{kk}} \quad ; \quad i = (k+1), \cdots, n \\ U_{kj} &= \frac{a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} L_{kr}U_{rj}}{L_{kk}} \quad ; \quad j = (k+1), \cdots, n \end{aligned}$$

3.2.4. Factorización QR

Factorización QR por Gram-Schmidt

La descomposición QR (llamada también factorización QR) de una matriz es una descomposición de una matriz en una matriz ortogonal y una triangular. Una descomposición QR de una matriz real A (no necesariamente cuadrada) es una descomposición de A como:

$$A = QR$$

donde Q es una matriz ortogonal ($Q^T \times Q = I$) del mismo tamaño que A, las columnas de Q son ortonormales y R es una matriz triangular superior. Si A es no singular, entonces esta factorización es única.

Procedimiento

$$A = [a_1|a_2|\dots|a_n]$$

Entonces,

$$u_1 = a_1, \qquad q_1 = \frac{u_1}{|u_1|}$$

$$u_2 = a_2 - (a_2.q_1).q_1, \qquad q_2 = \frac{u_2}{|u_2|}$$

$$u_{k+1} = a_{k+1} - (a_{k+1}.q_1)q_1 - \dots - (a_{k+1}.q_k)q_k, \qquad q_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{|u_{k+1}|}$$

El resultado de la factorización es:

$$A = [a_1|a_2|\dots|a_n] = [q_1|q_2|\dots|q_n] \begin{bmatrix} a_1.q_1 & a_2.q_1 & \dots & a_n.q_1 \\ 0 & a_2.q_2 & \dots & a_n.q_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n.q_n \end{bmatrix} = QR$$

Ejemplo

Hallar la factorización QR de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

Con los vectores $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Luego:

$$u_1 = a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad q_1 = \frac{u_1}{|u_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = a_2 - (a_2.q_1)q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad q_2 = \frac{u_2}{|u_2|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Así:

$$Q = [q_1 \mid q_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} a_1.q_1 & a_2.q_1 \\ 0 & a_2.q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

3.3. Aplicaciones con MatLab

3.3.1. Factorización LU con pivoteo en MatLab

El programa MatLab tiene incorporada la factorización de matrices; sin embargo, se trata de la factorización con pivoteo, contando para ello con el comando **lu**, cuya sintaxis se muestra a continuación:

$$[L, U, P] = lu(A)$$

donde A es la matriz por factorizar; L y U las matrices triangular inferior y superior, respectivamente; y P es la matriz de permutación.
Ejemplo

```
clc
% Ingresando la Matriz A
A=[10 5 6 -20;1 2 3 4;40 10 20 30;9 8 7 6]
% Ingresando vector la factorizacion lu
[L,U,P]=lu(A)
```

```
>> A=[10 5 6 -20;1 2 3 4;40 10 20 30;9 8 7 6]

A =

    10     5     6   -20
     1     2     3     4
    40    10    20    30
     9     8     7     6

>> [L,U,P]=lu(A)

L =

    1.0000         0         0         0
    0.2250    1.0000         0         0
    0.0250    0.3043    1.0000         0
    0.2500    0.4348   -0.0500    1.0000
```

```
U =

   40.0000   10.0000   20.0000   30.0000
         0    5.7500    2.5000   -0.7500
         0         0    1.7391    3.4783
         0         0         0  -27.0000


P =

     0     0     1     0
     0     0     0     1
     0     1     0     0
     1     0     0     0
```

Al comparar las matrices A y $L \cdot U$ así como $P \cdot A$ y $L \cdot U$ observamos lo siguiente:

```
A =

    10     5     6   -20
     1     2     3     4
    40    10    20    30
     9     8     7     6

>> L*U

ans =

    40    10    20    30
     9     8     7     6
     1     2     3     4
    10     5     6   -20
```

```
>> P*A

ans =

    40    10    20    30
     9     8     7     6
     1     2     3     4
    10     5     6   -20
```

```
>> P

P =

     0     0     1     0
     0     0     0     1
     0     1     0     0
     1     0     0     0
```

donde P es la matriz de permutación que guarda las pivotaciones que se realizaron en el proceso de eliminación gaussiana. Asimismo, la factorización obtenida es la forma de Doolittle.

Ejemplo

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$10x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 20x_4 = 223 \tag{3.1}$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -11 \tag{3.2}$$
$$40x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 30x_4 = -50 \tag{3.3}$$
$$9x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 31 \tag{3.4}$$

Realice los siguientes pasos:

- Exprese el sistema de ecuaciones en su forma matricial $Ax = b$.
- Efectue la siguiente instrucción en MatLab, para factorizar la matriz A: $[L_d, U_d, P] = lu(A)$.
  Se cumple $L_d \cdot U_d = P$, siendo P una matriz de permutación de la matriz identidad.
- Resuelva los siguientes sistemas $L_d y = Pb$, luego $U_d x = y$.

Solución

```
A=[10 5 6 -20;1 2 3 4;40 10 20 30;9 8 7 6]
b=[223;-11;-50;31]
[L,U]=lu(A)
[L,U,P]=lu(A)
```

$LU = PA$
Resolviendo el sistema $Ax = b$
Multiplicamos por la matriz a ambos miembros de la ecuación
$PAx = Pb$
$LUx = Pb$
Resolvemos dos sistemas triangulares
$Ly = Pb$.....(1)
$Ux = y$........(2)

```
%Resolviendo la ecuacion (1)
y=sustidir(L,P*b)
%Resolviendo la ecuacion (2)
x=sustireg(U,y)
```

3.3.2. Factorización de Doolittle

Función Doolittle

Implemente una función llamada **doolittle** en MatLab que permita factorizar la matriz A de orden n, en la forma $A = LU$.

function [L,U]=doolittle(A)

Solución

```
function [L,U]=doolittle(A)
[m,n]=size(A);
U=A;
L=eye(n);
for k=1:n-1
    pivo=U(k,k);
    for j=k+1:n
        L(j,k)=U(j,k)/pivo;
        U(j,:)=U(j,:)-L(j,k)*U(k,:);
    end
end
end
```

3.3.3. Factorización de Crout

Presentamos ahora una factorización LU sin pivoteo llamada **factorización de Crout**.

Ejemplo

Halle la factorización de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

utilizando el método de Crout.

Solución

```
clc
%Ingresando la matriz A
A=[1 2 3;1 1 6;3 6 10]
%Factorizando la Matriz A
%Eliminacion por columnas ( Crout )
L=A
U=eye(3,3)
%Paso 1
%Hallando los multiplicadores
m12=L(1,2)/L(1,1)
m13=L(1,3)/L(1,1)
%Construyendo L
L(:,2)=L(:,2)-m12*L(:,1)
L(:,3)=L(:,3)-m13*L(:,1)
%Construyendo U
U(1,2)=m12
U(1,3)=m13
%Paso 2
%Hallando multiplicador
m23=L(2,3)/L(2,2)
%Construyendo L
L(:,3)=L(:,3)-m23*L(:,2)
%Construyendo U
U(2,3)=m23
disp(L)
disp(U)
```

Función crout

Implemente una función llamada **crout** en MatLab que permita factorizar la matriz A de orden n, en la forma $A = LU$.

function [L,U]=crout(A)

Solución

```
function [L,U]=crout(A)
%A debe ser cuadrada
n=size(A,2) %Numero de columna de A
L=A;
U=eye(n) ;
for k=1:n
    pivo=L(k,k);
    for j=k+1:n
        U(k,j)=L(k,j)/pivo;
        L(:,j)=L(:,j)-U(k,j)*L(:,k)
    end
end
end
```

3.3.4. Resolución de SEL mediante la factorización LU

Consideremos el sistema lineal $Ax = b$.

1. Factorizar la matriz A mediante el método de Crout $A = L * U$
2. Resolver el sistema de ecuaciones
$$Ly = b$$
3. Resolver el sistema de ecuaciones
$$Ux = y$$

Contamos para ello con los algoritmos de sustitución hacia adelante y hacia atrás:

```
function [x]=sustidir(L,b)
[m,n]=size(L);
x=zeros(n,1);
for k=1:n
    x(k)=(b(k)-L(k,1:k-1)*x(1:k-1))/L(k,k);
end
```

```
function [x]=sustireg(U,b)
[m,n]=size(U);
x=zeros(n,1);
for k=n:-1:1
    x(k)=(b(k)-sum(U(k,k+1:n)*x(k+1:n)))/U(k,k);
end
```

Ejemplo

Dado el siguiente sistema de ecuaciones $Ax = b$, expresado en su forma algebraica:

$$\begin{aligned}
&10x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 20x_4 = 223\\
&x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -11\\
&40x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 30x_4 = -50\\
&9x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 31
\end{aligned}$$

1. Factorice la matriz A, de la forma $A = LU$ utilizando el método de **Doolittle** y **Crout**.

2. Resuelva el sistema $Ax = b$. Para ello:

   2.1. Resuelva el sistema $Ly = b$.

   2.2. Seguidamente, resuelva el sistema $Ux = y$ (utilice la función **sustidir.m** y la función **sustireg.m**).

Solución:

Método de Doolittle

```
format long
A=[10 5 6 -20;1 2 3 4;40 10 20 30;9 8 7 6]
b=[223;-11;-50;31]
%item 1
[L1,U1]=doolittle(A) %Doolittle
```

Método de Crout

```
format long
A=[10 5 6 -20;1 2 3 4;40 10 20 30;9 8 7 6]
b=[223;-11;-50;31]
%item 1
[L2,U2]=crout(A) %Doolittle
```

$Ax = b \to LUx = b$

Resolvemos dos sistemas triangulares
$Ly = b$.....(1)
$Ux = y$........(2)

```
%Resolviendo la ecuacion (1)
y=sustidir(L,b)
%Resolviendo la ecuacion (2)
x=sustireg(U,y)
```

Utilizando la función **crout**

```
[L,U]=crout(A)
%Resolviendo la ecuacion (1)
y=sustidir(L,b)
%Resolviendo la ecuacion (2)
x=sustireg(U,y)
```

3.3.5. Factorización QR con MatLab

Definición

La factorización QR de una matriz A de orden $m \times n$, usando el método de Gram–Schmidt, consiste en encontrar una matriz ortogonal Q del mismo orden que A y una matriz triangular superior R de orden $n \times n$ tal que

$$A = QR$$

Ejemplo

Factorización QR de una matriz usando el método de Gram–Schmidt

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -19 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -12 \end{bmatrix}$$

Solución

```
M=[2 6 -19;4 2 2 ;-2 -1 4;1 3 -12]
a1=M(:,1)
a2=M(:,2)
a3=M(:,3)
u1=a1;
q1=u1/norm(u1,2)
u2=a2-dot(a2,q1)*q1
q2=u2/norm(u2,2)
u3=a3-dot(a3,q2)*q2-dot(a3,q1)*q1
q3=u3/norm(u3,2)
format rat
Q=[q1 q2 q3]
R=[dot(a1,q1) dot(a2,q1) dot(a3,q1);0 dot(a2,q2) dot(a3,q2);0 0 ...
    dot(a3,q3)]
disp('Q*R')
Q*R
```

Función QR - Gram-Schmidt

Implemente una función llamada **myQR** en MatLab que permita factorizar la matriz A de orden $m \times n$, en la forma $A = QR$, utilizando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

function [L,U]=myQR(A)

Solución

```
function [Q,R]=myQR(A)
[m,n]=size(A);
Q=zeros(m,n);
R=zeros(n,n);
for j=1:n     % Gram-Schmidt orthogonalization
    a=A(:,j); % a begins as column j of A
    for i=1:j-1
        R(i,j)=Q(:,i)'*A(:,j);
        a=a-R(i,j)*Q(:,i);
    end
    R(j,j)=norm(a);
    Q(:,j)=a/R(j,j); %normalize a to be next unit vector q
end
end
```

3.3.6. SEL utilizando QR

Sea A de orden n y b de orden $n \times 1$, tal que A tiene factorización QR. Consideremos el sistema

$$Ax = b$$

Como $A = QR$, reemplazando en la ecuación anterior, tenemos:

$$QRx = b$$

Multiplicando por Q^T

$$Q^T QRx = Q^T b$$

de donde

$$Rx = Q^T b$$

Si hacemos $c = Q^T b$, entonces el sistema por resolver es

$$Rx = c$$

El cual es un sistema triangular superior y, por lo tanto, fácil de resolver.

Ejemplo

Para el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x_1 - 0.2x_2 - 0.5x_3 &= 8 \\ 0.1x_1 + 7x_2 + 0.4x_3 &= -19.5 \\ 0.4x_1 - 0.1x_2 + 10x_3 &= 72.4 \end{aligned}$$

resuelva utilizando factorización QR.

Solución

Se obtiene la factorización QR de A:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.9907 & -0.0314 & -0.1325 \\ 0.0330 & 0.9994 & 0.0104 \\ 0.1321 & -0.0147 & 0.9911 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 3.0282 & 0.0198 & 0.8388 \\ 0 & 7.0035 & 0.2689 \\ 0 & 0 & 9.9817 \end{bmatrix}$$

Se calcula

$$c = \begin{bmatrix} 16.8450 \\ -20.8000 \\ 70.4955 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la solución:

$$x = \begin{bmatrix} 3.6277 \\ -3.2411 \\ 7.0625 \end{bmatrix}$$

```
M=[3 -0.2 -0.5;0.1 7 0.4;0.4 -0.1 10]
b=[8;-19.5;72.4]
[Q,R]=myQR(M)
c=Q'*b
x=sustireg(R,c)
```

3.4. Ejercicios propuestos

1. Encuentre la factorización LU de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

utilizando el método de Doolittle.

2. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ s & 0 & 1 \end{bmatrix}$, con $s \in \mathbb{R}$

   a) Aplique la factorización de Crout y muestre L y U.

   b) Determine la primera columna de A^{-1}, usando la solución de los sistemas $LUx_i = e_i$, donde e_i son las columnas de la matriz identidad. Así $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, y los x_i son las columnas de A^{-1}.

3. Aplique la factorización de Crout para resolver el sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

4. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 7x_1 - 2x_2 + x_3 &= 12 \\ 14x_1 - 7x_2 - 3x_3 &= 17 \\ -7x_1 + 11x_2 + 18x_3 &= 5 \end{aligned}$$

dada la siguiente descomposición de la matriz de coeficientes A:

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 14 & -7 & -3 \\ -7 & 11 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

5. Determine la inversa de A, usando la factorización matricial. Sea

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -6 & 13 \end{bmatrix}$$

6. Halle la factorización $\boldsymbol{QR}$ de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

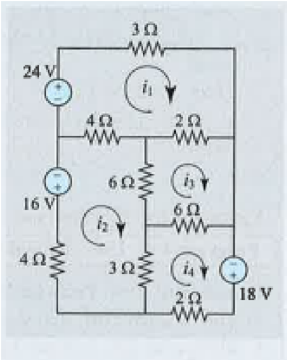
a) $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1 & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{3} \end{bmatrix}$

b) $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 3/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{3} \end{bmatrix}$

c) $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{3} \end{bmatrix}$

d) $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1 & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

7. Determine las corrientes $i_1.i_2$ y i_3 en el siguiente circuito que se muestra en la figura:



- Plantee el sistema de ecuaciones lineales que permita encontrar $i_1 . i_2$ e i_3 .
- Resuelva el sistema de ecuaciones utilizando el método de Crout.

4. Combinación lineal y base

4.1. Combinación lineal

4.1.1. Definiciones generales

El concepto de combinación lineal está íntimamente ligado al de consistencia de un sistema de ecuaciones lineales. En efecto, la posibilidad o no de solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

es la existencia de una familia de escalares $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ tal que

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}s_1 + \cdots + a_{1n}s_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}s_1 + \cdots + a_{mn}s_n & = & b_m \end{array}\right.$$

lo que equivale a

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = s_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + s_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definición

Sean $v_1, v_2, \ldots + v_k$ vectores que pertenecen a $\mathbb{R}^n$ y sean $c_1, c_2, \ldots, c_k$ escalares. El vector de la forma

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_kv_k$$

se llama **combinación lineal**, abreviadamente c.l, de $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$ se llaman coeficientes de la combinación lineal.

Ejemplos y contraejemplos

1. $(3, 2)$ es c.l. de $(1, 0)$ y $(0, 1)$, pues $(3, 2) = 3(1, 0) + 2(0, 1)$.
2. $(1, 2, 3)$ no puede ser c.l. de $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, ya que toda c.l. de estos vectores tiene la primera componente nula.

Observación: es obvio que el vector (0) es c.l. de cualquier familia:

$$0v_1 + \cdots + 0v_m = (0) + \cdots + (0) = (0)$$

SEL vs Combinaciones lineales

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las incógnitas de un sistema cuya matriz de coeficientes es A y cuyo vector de constantes es b, siendo $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ las columnas de A, entonces

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \leftrightarrow x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

En otras palabras, el sistema de ecuaciones lineales tiene solución si y solamente si el vector b puede ser expresado como una combinación lineal de las columnas de la matriz A. La solución al sistema está dada por el vector formado por los coeficientes de dicha combinación lineal de las columnas de A que dan b.

Nota:

Si el sistema formado resulta ser consistente, entonces el vector es efectivamente una combinación lineal de los vectores dados. Por el contrario, si el sistema es inconsistente, el vector no puede expresarse como una combinación lineal de dichos vectores.

Ejemplo

Verifique si el primer vector es una combinación lineal de los restantes

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 24 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Solución:
Dada la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 12 \\ 5 & 4 & 24 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

como el sistema es consistente, el vector sí es una combinación lineal de los restantes.

Ejemplo

Exprese $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ y $\mathbf{v_3}$.

Sea $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Solución:
Dada la definición de combinación lineal:

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Se plantean las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x + 2y + z &= 1 \\ x + 3y &= 4 \end{aligned}$$

Si se llevan a la forma matricial aumentada, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_2 \to f_2 - f_1]{f_3 \to f_3 - f_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

De aquí obtenemos:

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = -2$$

Ejemplo

Indique si el vector $\mathbf{y}$ es combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. Donde:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -24 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Solución:
Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 6 & 24 & -24 \\ 2 & 8 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

y la matriz ampliada:

$$Aa = \begin{bmatrix} 6 & 24 & -24 & 6 \\ 2 & 8 & -8 & 3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\xrightarrow{f_2 \to f_2 - \frac{1}{3} f_1} \begin{bmatrix} 6 & 24 & -24 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El sistema no es consistente. Por lo tanto el vector $\mathbf{y}$ no es una combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$.

4.2. Independencia lineal

4.2.1. Definiciones generales

Definición

En un espacio vectorial V, los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ se consideran linealmente dependientes (l.d.) si existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$ no todas iguales a cero, tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

En caso contrario, se dice que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ son linealmente independientes (l.i.); esto es, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ son linealmente independientes si siempre que $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, tenemos, necesariamente que

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0.$$

Ejemplo

Verifique si los vectores

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

son linealmente dependientes o linealmente independientes.

Solución
Dado el sistema de ecuaciones

$$c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuya única solución es $c_1 = c_2 = 0$. Entonces los vectores son linealmente independientes.

Ejemplo

Verificar si los siguientes vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 2), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, 2)$ y $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 3)$ en el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ son linealmente independientes o si son linealmente dependientes.

Solución
Dado el sistema de ecuaciones homogéneas

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

que debe ser resuelto para c_1, c_2 y c_3. El sistema que se obtiene es:

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= 0 \\ c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 0 \end{aligned}$$

cuya única solución es $c_! = c_2 = c_3 = 0$. Esto verifica que los vectores mencionados son linealmente independientes.

Ejemplo

Consideremos los siguientes vectores

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, -1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, -2, 1), \quad \mathbf{v}_3 = (-3, 2, -1)$$

y

$$\mathbf{v}_4 = (2, 0, 0) \text{ en } \mathbb{R}^3$$

Verificar si el conjunto $S = \{\mathbf{v}_1 . \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es linealmente independiente o linealmente dependiente.

Solución
Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 - 3c_3 + 2c_4 &= 0 \\ 2c_1 - 2c_2 + 2c_3 &= 0 \\ -c_1 + c_2 - c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Se verifica que el sistema tiene soluciones no triviales. Entonces S es linealmente dependiente.

4.3. Base

4.3.1. Definiciones generales

Definición

Los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ en un espacio vectorial V forman una **base** para V si:

1. $v_1, v_2, \ldots, v_k$ son linealmente independientes, y
2. $v_1, v_2, \ldots, v_k$ generan a V, es decir, $V = \text{Gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$

Ejemplo

Los vectores $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ forman una base para $\mathbb{R}^2$

Ejemplo

Los siguientes vectores $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ conforman una base para $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto, podemos generalizar que los vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ forman una base para $\mathbb{R}^n$.

A estos conjuntos se les llama **base canónica** o **base estándar** para $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$, respectivamente.

Ejemplo

Sean $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ y $v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$. Verifique si v_1, v_2 y v_3 forman una base para $\mathbb{R}^3$.

Solución:
Para mostrar que v_1, v_2 y v_3 son linealmente independientes:

- Formamos la ecuación

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots c_nv_n = 0$$

- Planteamos el sistema de ecuaciones.

Sustituyendo los valores de v_1, v_2 y v_3, obtenemos el sistema lineal:

$$\begin{aligned} 3c_1 - 4c_2 - 2c_3 &= 0 \\ c_2 + c_3 &= 0 \\ -6c_1 + 7c_2 + 5c_3 &= 0. \end{aligned}$$

- Si el sistema tiene solución única entonces son l.i., de lo contrario son l.d.

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ -6 & 7 & 5 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_3 - (-2)f_1} \begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{f_3 \to f_3 - (-1)f_2} \begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema anterior tiene única solución $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, lo cual indica que los vectores son linealmente independientes.

Para verificar que Gen$\{v_1, v_2, v_3\}$ genera $\mathbb{R}^3$

- Consideremos $v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$.
- A partir de la ecuación $k_1v_1 + k_2v2 + k_3v_3 = v$, planteamos un sistema de ecuaciones. Sustituyendo v_1, v_2, v_3 y v, en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} 3k_1 - 4k_2 - 2k_3 &= a \\ k_2 + k_3 &= b \\ -6k_1 + 7k_2 + 5k_3 &= c. \end{aligned}$$

- Si el sistema es compatible, entonces el conjunto genera $\mathbb{R}^3$, de lo contrario diremos que no lo genera.

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 & | & a \\ 0 & 1 & 1 & | & b \\ -6 & 7 & 5 & | & c \end{bmatrix} \xrightarrow{f_3 \to 3-(-2)f_1} \begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 & | & a \\ 0 & 1 & 1 & | & b \\ 0 & -1 & 1 & | & c+2a \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 \to f_3-(-1)f_1} \begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 & | & a \\ 0 & 1 & 1 & | & b \\ 0 & 0 & 2 & | & c+2a+b \end{bmatrix}$$

.

Este sistema es compatible determinado, es decir, tiene una única solución para cualesquiera valores de a, b y c.

Ejemplo

Verifique si el conjunto de vectores $(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)$ constituye una base para $\mathbb{R}^3$.

Solución

Necesitamos verificar si esos vectores son linealmente independientes y si forman un sistema de generadores del espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$.
Primero, para comprobar la independencia lineal, organizamos los vectores en forma de matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos observar que el rango de esta matriz A es 3, lo cual implica que los tres vectores que la componen son linealmente independientes.
Luego, para verificar si constituyen un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$, debemos expresar cualquier vector (a, b, c) perteneciente a $\mathbb{R}^3$ como una combinación lineal de estos tres vectores.

$$(a, b, c) = \alpha_1(1, 1, 1) + \alpha_2(0, 1, 1) + \alpha_3(0, 0, 1) = [\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3]$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \alpha_1 & = & a \\ \alpha_1 + \alpha_2 & = & b \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & c \end{array} \right. \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Tenemos un sistema lineal con variables $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y términos independientes a, b y c. La matriz asociada a este sistema lineal tiene rango 3, como vimos anteriormente. Además, el rango de la matriz ampliada también es 3. Cuando el rango de la matriz del sistema coincide con el rango de la matriz ampliada, el sistema lineal presenta solución única. Esta solución única consiste en el conjunto de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ que nos permite expresar cualquier vector (a, b, c) como una combinación lineal de los tres vectores originales.

4.4. Aplicaciones con MatLab

4.4.1. Combinación lineal

Ejemplos

P1

Dados los vectores $v1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$, $v3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. ¿El vector v_3 es combinación lineal de v_1 y v_2?

Solución

```
 v1=[2;3]
v2=[0;5]
v3=[4;11]
Aa=[v1 v2 v3]
B=rref(Aa)
%Otra forma
RangoA=rank([v1 v2])
RangoAa=rank(Aa)
```

Rango de $A = 2$
Rango de $Aa = 2$
Por lo tanto, el sistema es compatible. Existen c_1 y c_2, lo que implica que v_3 es una combinación lineal de v_1 y v_2:

$$v_3 = c_1 v_1 + c_2 v_2$$

P2

Dado el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$

$$\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} ; v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} ; v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$

1. Comprobar que cada uno de los tres vectores puede ser expresado como combinación lineal de los otros dos.
2. ¿Los vectores son linealmente independientes?
3. Utilice MatLab para analizar y resolver los sistemas lineales planteados.

Solución

```
 % Analizando si v3 es combinacion lineal de v1 y v2
v1=[1;-1;2]
v2=[2;3;0]
v3=[-1;-9;6]
Aa=[v1 v2 v3]
B=rref(Aa)
% Analizando siv1 es combinacion lineal de v2 y v3
Aa=[v2 v3 v1]
B=rref(Aa)
```

Parte 1
Rango de $A = 2$
Rango de $Aa = 2$
El sistema es compatible. Es decir, existen c_1 y c_2.
Por lo tanto, v_3 es una combinación lineal de v_1 y v_2.

Parte 2
Rpta: NO. Dado que uno de ellos es una combinación lineal de los otros dos.

4.4.2. Vectores linealmente independientes

Ejemplos

P1

Dados los vectores $v1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $v2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Verifique si v_1 y v_2 son linealmente independientes.

Solución $c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$

```
v1=[3;4]
v2=[1;2]
Aa=[v1 v2 zeros(2,1)]
B=rref(Aa)
```

Rango de $A = 2$
Rango de $Aa = 2$
El número de variables es igual a 2.
Por lo tanto, el sistema tiene una solución unica. Solución trivial: $c_1 = c_2 = 0$.

P2

Dado el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$

$$\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

1. Compruebe que ninguno de los tres vectores pueda ser expresado como una combinación lineal de los restantes.
2. ¿Los vectores son linealmente independientes?
3. Utilice MatLab para analizar y resolver los sistemas lineales planteados.

Solución

Ítem 1

```
v1=[1;1;0]
v2=[0;1;1]
v3=[1;0;1]
Aa=[v1 v2 v3]
B=rref(Aa)
```

Rango de $A = 2$
Rango de $Aa = 3$
El sistema es inconsistente. Es decir, no existe c_1, c_2.
Por lo tanto, v_3 no es combinación lineal de v_1 y v_2.

Ítem 2

```
v1=[1;1;0]
v2=[0;1;1]
v3=[1;0;1]
Aa=[v1 v2 v3 zeros(3,1)]
B=rref(Aa)
```

Rango de $A = 3$
Rango de $Aa = 3$
El número de variables es igual a 3. El sistema tiene una solución única. La solución es la trivial (vector nulo).

4.4.3. Base

Base

Si $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, la dimensión de V es n y la indicamos como $dim(V) = n$.

Ejemplos

P1

Dado el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$

$$\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- ¿Son linealmente dependientes o independientes?
- ¿El conjunto es una base?
- Sabiendo que el espacio $\mathbb{R}^3$ es de dimensión 3. ¿Qué se puede mencionar sobre los vectores v_1, v_2, v_3 y v_4?

Solución

```
v1=[1;1;0]
v2=[2;1;-1]
v3=[-1;1;2]
v4=[0;1;1]
Aa=[v1 v2 v3 v4 zeros(3,1)]
B=rref(Aa)
```

Rango de $A = 2$
Rango de $Aa = 2$
El número de variables es igual a cuatro.
Por lo tanto, tiene infinitas soluciones.
Los vectores no son linealmente independientes (es decir, son linealmente dependientes).
No es una base.

P2

Dado el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$

$$\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}; v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -10 \end{bmatrix}; v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; v_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$$

Haciendo uso del comando **rref** del MatLab, explique la razón por la cual el conjunto de vectores proporcionado no es una base para $\mathbb{R}^3$.

Solución

¿v_1, v_2, v_3 son vectores linealmente independientes?

```
v1=[1;2;5]
v2=[-2;-4;-9]
v3=[0;1;1]
Aa=[v1 v2 v3 zeros(3,1)]
B=rref(Aa)
```

Rango de $A = 3$
Rango de $Aa = 3$
El número de variables es igual a 3.
Por lo tanto, tiene solución única. La solución es trivial.
Los vectores v_1, v_2 y v_3 son linealmente independientes.
¿v_1, v_2 y v_3 generan $\mathbb{R}^3$?

```
syms a b c
v1=[1;2;5]
v2=[-2;-4;-9]
v3=[0;1;1]
v=[a;b;c]
Aa=[v1 v2 v3 v]
B=rref(Aa)
```

Rango de $A = 3$
Rango de $Aa = 3$
El sistema es compatible.
Por lo tanto, cualquier vector v se puede expresar como una combinación lineal de $v_1.v_2$ y v_3.

4.4.4. Ejercicio

P1

Dado el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$

$$\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}; v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -9 \end{bmatrix}; v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Haciendo uso del comando **rref** del MatLab, explique la razón por la cual el conjunto de vectores proporcionado es una base para $\mathbb{R}^3$.

4.4.5. Aplicación

Un caso que muestra cómo surgen los múltiplos escalares y las combinaciones lineales es cuando una cantidad, como el **costo**, se descompone en varias categorías. El principio básico de esta aplicación concierne al costo de fabricar varias unidades de un producto cuando se conoce el costo por unidad, es decir:

$$costo\ total = costo\ por\ unidad \times cantidad\ de\ unidades$$

P1

Una compañía produce dos productos diferentes, denominados B y C. Para generar \$ 1.00 de ingresos por la venta del producto B, la empresa incurre en los siguientes costos: \$ 0.45 en materiales, \$ 0.25 en mano de obra y \$ 0.15 en costos indirectos. En cuanto al producto C, para obtener \$ 1.00 de ingresos, la compañía gasta \$ 0.40 en materiales, \$ 0.30 en mano de obra y \$ 0.15 en costos indirectos. Consideremos los siguientes vectores para representar los costos de producción de cada uno de estos productos:

$$b = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.25 \\ 0.15 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 0.40 \\ 0.30 \\ 0.15 \end{bmatrix}$$

Entonces los vectores b y c representan los **costos por dólar de ingreso** para los dos productos.

1. Calcule los vectores $100b$ y $1000c$ y luego proporcione una interpretación económica de los vectores obtenidos.

2. Suponga que la empresa desea obtener x_1 dólares del producto B y x_2 dólares del producto C. Modele una expresión que describa los diversos

costos que tendrá que enfrentar la empresa por materiales, mano de obra y gastos indirectos.

4.5. Ejercicios propuestos

1. ¿Para qué valor de c el conjunto de vectores $\{(1, c, 1), (0, 1, -1), (1, 0, 2)\}$ es linealmente dependiente?

2. Verificar si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes o linealmente dependientes:

   a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

   b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

   c) $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ c \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} \right\}$, donde a, b, c, d, e, f son todas constantes no nulas.

3. Proporcione un ejemplo de cuatro vectores que sean linealmente dependientes, pero que cualquier subconjunto de tres de ellos sea linealmente independiente.

4. Indique si el vector $\mathbf{y}$ es combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Donde:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 38 \\ 41 \\ 29 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

5. Dados los siguientes conjuntos de vectores:

   a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

   b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

   determine cuál de los siguientes conjuntos es linealmente independiente. Justifique su respuesta.

6. Verificar si los vectores dados $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 3)$, $\mathbf{v} = (0, 1, -2, 0)$, $\mathbf{w} = (0, -1, 1, 1)$ son linealmente independientes. Si es posible, exprese $\mathbf{z} = (2, -3, 2, -3)$ como una combinación lineal de $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

7. ¿Cuáles de los conjuntos de vectores son bases para el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$?

   a) $\{(1, 2, 0), (0, 1, -1)\}$

   b) $\{(1, 1, -1), (2, 3, 4), (4, 1, -1), (0, 1, -1)\}$

   c) $\{(3, 2, 2), (-1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$

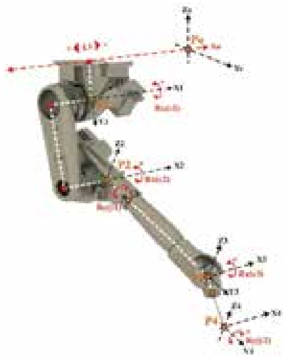
   d) $\{(1, 0, 0), (0, 2, -1), (3, 4, 1), (0, 1, 0)\}$

5. Transformaciones lineales

5.1. Definiciones generales

En las matemáticas una de las nociones fundamentales es la de función. En este capítulo examinaremos un tipo particular de función que asigna elementos de un espacio vectorial euclidiano a otro, preservando las operaciones de linealidad, es decir, la suma y la multiplicación por un escalar. A este tipo especial de función se le denomina transformación lineal. Por lo tanto, una transformación lineal es una función, pero no todas las funciones entre espacios vectoriales euclidianos son transformaciones lineales.

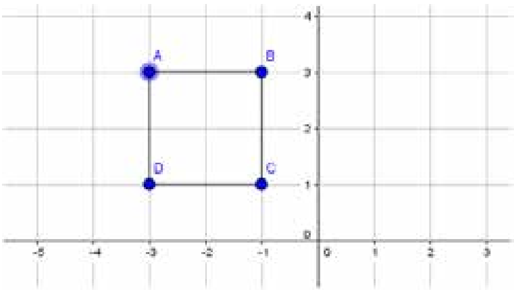
¿Para qué nos sirven las transformaciones lineales?
Las transformaciones lineales tienen numerosas aplicaciones, entre ellas el diseño de brazos robóticos para la industria. El brazo robótico se diseñó mediante el software CAD (diseño asistido por computadora) Solidworks®, considerando las especificaciones del fabricante y siguiendo los lineamientos de ingeniería que permiten comprender el funcionamiento básico del mismo. La simulación del trabajo se realizó utilizando MatLab®.



Transformaciones lineales de dimensión finita, aplicadas al desarrollo del modelo cinemático directo para el robot KUKA KR 60 JET.

5.2. Transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

La geometría de las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$
Imagina que quieres reflejar el cuadrado que se muestra en la figura con respecto al eje X.



¿Cuáles serían las coordenadas de los nuevos puntos A, B, C y D? Identifícalos como A', B', C' y D'.

Ejemplo

Si consideramos que T es la función que lleva el punto A en el punto A', al punto B en el punto B' y así sucesivamente, complete la tabla siguiente:

$$\begin{array}{l} T(A) = A' \to T(-3;3) = (-3;-3) = A' \\ T(B) = B' \to T(-1;3) = (-1;\ \ ) = B' \\ T(C) = C' \to T(-1;1) = (\ \ ;\ \ ) = C' \\ T(D) = D' \to T(\ \ ;\ \ ) = (\ \ ;\ \ ) = D' \end{array}$$

Intente definir la regla de correspondencia de $T(x;y)$:

$$T(x;y) = (\ \ ;\ \ )$$

Definición

Una transformación lineal es una función $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con las siguientes propiedades:

1. Para cada $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\quad T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

2. Para cada $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ y cualquier $c \in \mathbb{R}$, $T(c\vec{u}) = cT(\vec{u})$

Ejemplo

Dado $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $T(x)=5x$. Demuestre que T es una transformación lineal.

Solución

Cumple con las dos propiedades:

- Sea u, $v\in\mathbb{R}$, se cumple: $T(u+v)=5(u+v)=5u+5v=T(u)+T(v)$
- Sea $u\in\mathbb{R}\quad c\in\mathbb{R}$, se cumple: $T(cu)=5(cu)=c(5u)=cT(u)$

Ejemplo

Consideremos la transformación T: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+y\\ x-y\\ 3y\end{bmatrix}$. Determine si T es una transformación lineal.

Solución

Sean $\mathbf{u}=\begin{bmatrix} u_1\\ u_2\end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$, entonces $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix} u_1+v_1\\ u_2+v_2\end{bmatrix}$

$$\mathrm{T}(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\mathrm{T}\begin{bmatrix} u_1+v_1\\ u_2+v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (u_1+v_1)+(u_2+v_2)\\ (u_1+v_1)-(u_2+v_2)\\ 3\,(u_2+v_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (u_1+u_2)+(v_1+v_2)\\ (u_1-u_2)+(v_1-v_2)\\ 3u_2+3v_2\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{T}(\mathbf{u})=\mathrm{T}\begin{bmatrix} u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_1+u_2\\ u_1-u_2\\ 3u_2\end{bmatrix}\text{ y }\mathrm{T}(\mathbf{v})=\mathrm{T}\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_1+v_2\\ v_1-v_2\\ 3v_2\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{T}(\mathbf{u})+\mathrm{T}(\mathbf{v})=\mathrm{T}\begin{bmatrix} u_1\\ u_2\end{bmatrix}+\mathrm{T}\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_1+u_2\\ u_1-u_2\\ 3u_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v_1+v_2\\ v_1-v_2\\ 3v_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (u_1+u_2)+(v_1+v_2)\\ (u_1-u_2)+(v_1-v_2)\\ 3u_2+3v_2\end{bmatrix}$$

De donde: $T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\mathrm{T}(\mathbf{u})+\mathrm{T}(\mathbf{v})$

Sea c un escalar

$$\mathrm{T}(c\mathbf{u})=\mathrm{T}\begin{bmatrix} cu_1\\ cu_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} cu_1+cu_2\\ cu_1-cu_2\\ 3cu_2\end{bmatrix}$$

$$c\mathrm{T}(\mathbf{u}) = c\mathrm{T}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} u_1 + u_2 \\ u_1 - u_2 \\ 3u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cu_1 + cu_2 \\ cu_1 - cu_2 \\ 3cu_2 \end{bmatrix} = \mathrm{T}(c\mathbf{u})$$

Por lo tanto, T es una transformación lineal.

5.2.1. Propiedades

Sean $\mathrm{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal, y $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ como vectores en V. Eso implica que T tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{T}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
2. $\mathrm{T}(-\mathbf{u}) = -\mathrm{T}(\mathbf{u})$.
3. $\mathrm{T}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathrm{T}(\mathbf{u}) - \mathrm{T}(\mathbf{v})$.
4. Si $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$, entonces

$$\mathrm{T}(\mathbf{v}) = \mathrm{T}\left(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n\right) = c_1\mathrm{T}\left(\mathbf{v}_1\right) + c_2\mathrm{T}\left(\mathbf{v}_2\right) + \ldots + c_n\mathrm{T}\left(\mathbf{v}_n\right)$$

Observaciones

- Muchas funciones no son transformaciones lineales:

$$\cos(x+y) \neq \cos(x) + \cos(y) \quad \text{o} \quad (2x)^2 \neq 2(x^2)$$

Ejemplo

Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$T(1;0;0) = (2;-1;4),\ T(0;1;0) = (1;5;-2),\ T(0;0;1) = (0;3;1)$$

Encontrar $T(2;3;-2)$

Solución:

$$(2;3;-2) = 2(1;0;0) + 3(0;1;0) - 2(0;0;1)$$

$$T(2;3;-2) = 2T(1;0;0) + 3T(0;1;0) - 2T(0;0;1)$$

$$= 2(2;-1;4) + 3(1;5;-2) - 2(0;3;1)$$

$$= (7;7;0)$$

5.3. Representación matricial

Si A es una matriz de orden $m \times n$, entonces se puede definir una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cuya regla de correspondencia es $T(v) = Av$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal entonces existe una matriz A de orden $m \times n$ (llamada matriz asociada) talque $T(v) = Av$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$

Ejemplo

Indique cuál es la matriz asociada a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$,

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x + 2y + z \\ x + y + z \\ x - 3y \\ 2x + 3y + z \end{bmatrix}$$

Solución

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Dada la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, definida mediante $T(x) = \begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 \\ 5x_3 + 2x_1 - 2x_4 \\ x_2 + x_1 - 7x_4 + 3x_3 \end{bmatrix}$, halle su matriz asociada.

Solución

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

5.4. Aplicaciones de las transformaciones lineales

5.4.1. Reflexiones

Reflexiones en $\mathbb{R}^2$

Las transformaciones definidas por las siguientes matrices son llamadas reflexiones.
Reflexiones en torno al eje Y

$$T(x; y) = (-x; y)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

Reflexiones en torno al eje X

$$T(x; y) = (x; -y)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

Ejercicio

¿Cómo definiría transformaciones que reflejan puntos tomando la recta $y = x$ como espejo?

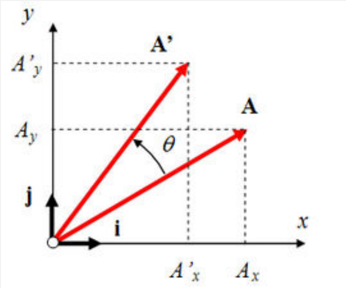
Ejercicio

¿Cómo definiría transformaciones que reflejan puntos tomando el origen como espejo?

5.4.2. Rotaciones

Ejemplo

¿Cómo definiría transformaciones que permiten rotar un punto dado en el plano a un cierto ángulo θ en sentido antihorario?



Sea $T:\ \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal rotación, donde $T(A) = A'$. Si $r = ||A|| = ||A'||$, entonces al ser $A = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ y $A' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, se tiene $x = rcos(\alpha)$; $y = rsin(\alpha)$, asimismo, $x' = rcos(\alpha + \theta)$ e $y' = rsin(\alpha + \theta)$. Resumiendo:

$$
\begin{aligned}
T(A) = T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} rcos(\alpha)cos(\theta) - rsin(\alpha)sin(\theta) \\ rsin(\alpha)cos(\theta) + rcos(\alpha)sin(\theta) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} xcos(\theta) - ysin(\theta) \\ ycos(\theta) + xsin(\theta) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

5.5. Kernel de una transformación lineal

Kernel

Sea T una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. El núcleo T es el subconjunto formado por todos los vectores en $\mathbb{R}^n$ que se mapean a cero en $\mathbb{R}^m$.

$$Ker(T) = \{v \in \mathbb{R}^n \quad / \quad T(v) = 0 \in \mathbb{R}^m\ \}$$

Ejemplo

Indique cuáles opciones contienen un vector en el núcleo de la transformación de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^3$ definida como

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x + 3z \\ -23x - 15y - 18z \\ -5x - 3y - 3z \end{bmatrix}$$

dentro de las opciones:

1. $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 0)^T$
2. $\mathbf{v}_2 = (12, -28, 8)^T$
3. $\mathbf{v}_3 = (1, -2, 1)^T$
4. $\mathbf{v}_4 = (3, -7, 2)^T$
5. $\mathbf{v}_5 = (2, -4, -4)^T$
6. $\mathbf{v}_6 = (9, -18, -15)^T$

Ejemplo

Encontrar el núcleo de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(v) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} v$$

Solución:
Tenemos que resolver el sistema de ecuaciones

$$T(v) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} v = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

De donde:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Así: $Ker(T) = \{x \in \mathbb{R}^3 \; / \; x = (t; -2t; t), \;\; t \in \mathbb{R}\}$

5.6. Imagen de una transformación lineal

Imagen

Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. El rango o imagen de T es el conjunto de todas las imágenes de T en $\mathbb{R}^m$.

$$Im(T) = \{\, w \in \mathbb{R}^m \quad / \quad w = T(v) \quad \text{Para algún } v \in \mathbb{R}^n \,\}$$

Es decir, el rango es el subconjunto de $\mathbb{R}^m$ formado por aquellos vectores que provienen de algún vector de $\mathbb{R}^n$.

Teorema del núcleo imagen

Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal entonces:

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T))$$

Ejemplo

Indique qué opciones contienen un vector en la imagen de la transformación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ definida como

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 5y + z \\ 8x + 12y + 6z \\ -4x - 2y - 4z \end{bmatrix}$$

dentro de las opciones:

1. $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 0)'$
2. $\mathbf{v}_2 = (2, 8, -4)'$
3. $\mathbf{v}_3 = (-23, -52, 6)'$
4. $\mathbf{v}_4 = (5, 12, -2)'$
5. $\mathbf{v}_5 = (-3, 1, -1)'$

Ejemplo

Encontrar la imagen (rango) de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(v) = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 8 & 12 & 6 \\ -4 & -2 & -4 \end{bmatrix} v$$

Solución

El vector $v_1 = (a; b; c)$ de $\mathbb{R}^3$ está en la imagen de T si existe un vector $(x; y; z)$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $T(x; y; z) = v$; es decir, si es consistente el sistema

$$\begin{array}{lcl} 2x + 5y + z & = & a \\ 8x + 12y + 6z & = & b \\ -4x - 2y - 4z & = & c \end{array}$$

Al formar la matriz aumentada y escalonada se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & a \\ 0 & -8 & 2 & -4a + b \\ 0 & 0 & 0 & -2a + b + c \end{bmatrix}$$

El sistema es consistente si y solo si $-2a + b + c = 0$, es decir, $a = (1/2)b + (1/2)c$. Esto es, $(a; b; c)$ está en la imagen de T si y solo si

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2b + 1/2c \\ b \\ c \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$Img(T) = Gen \left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

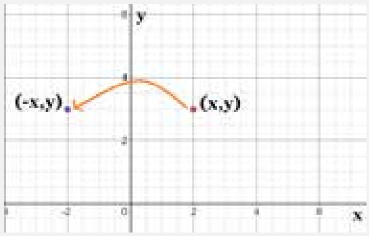
5.7. Aplicaciones con MatLab

5.7.1. Reflexiones en el plano XY

Reflexiones en el eje Y

$$T(x;y) = (-x;y)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$



Ejemplo

Refleje a través del eje Y el punto (1; 2).

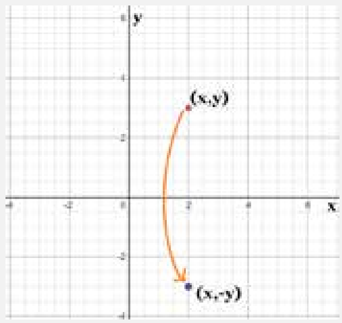
Solución

```
% Reflexion a traves del eje Y del punto (1;2).
x = 1;
y = 2;
grid on
plot(x,y,'b*');  % marca el punto (x;y) en el plano
hold on
A = [-1 0; 0 1];  % matriz de reflexion
Refl_Y = A*[x;y];
plot(Refl_Y(1),Refl_Y(2),'r*');  % marca el punto reflejado
xlim([-2, 2]);
ylim([0, 3]);
```

Reflexiones en el eje X

$$T(x; y) = (x; -y)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$



Ejemplo

Refleje a través del eje X el punto $(1; 2)$.

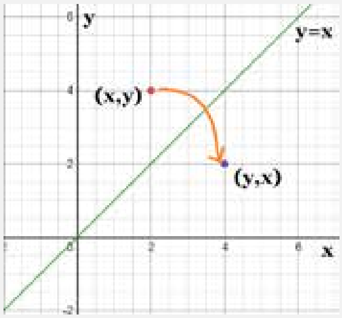
Solución

```
% Reflexion a traves del eje X del punto (1;2).
x = 1;
y = 2;
grid on
plot(x,y,'b*');   % marca el punto (x;y) en el plano
hold on
A = [1 0; 0 -1];
Refl_Y = A*[x;y];
plot(Refl_Y(1),Refl_Y(2),'r*');   % marca el punto reflejado a ...
    traves el eje Y
xlim([0, 2]);
ylim([-3, 3]);
```

Reflexión a través de la recta $y = x$

$$T(x;y) = (y;x)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$



Ejemplo

Refleje a través de la recta $y = x$ el punto $(2;4)$.

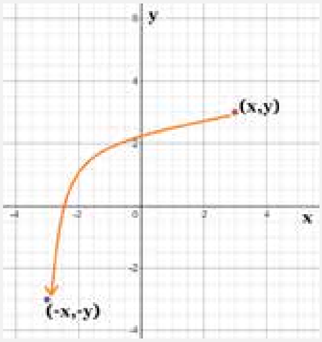
Solución

```
X=[2;4]
plot(X(1),X(2),'*r')
grid on
A=[0 1;1 0]
Refl=A*X
hold on
plot(Refl(1),Refl(2),'*b')
xx=[-2:0.01:6];
yy=xx;
plot(xx,yy,'--k')
hold off
xlim([-2 6])
ylim([-2 6])
```

Reflexión a través del origen

$$T(x;y) = (-x;-y)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$



Ejemplo

Refleje a través del origen el punto (2; 4).

Solución

```
X=[2;4]
plot(X(1),X(2),'*r')
grid on
A=[-1 0;0 -1]
Refl=A*X
hold on
plot(Refl(1),Refl(2),'*b')
hold off
xlim([-12 12])
ylim([-12 12])
```

Ejercicio

¿Cómo definiría transformaciones que reflejan puntos tomando la recta $y = -x$ como espejo?

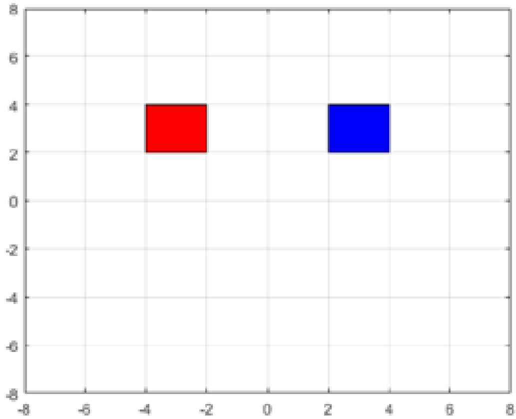
5.7.2. Aplicación

Cuadrado

Dados los siguientes puntos $A(2;2)$, $B(4;2)$, $C(4;4)$ y $D(2;4)$, que son los vértices de una placa metálica, refleje la placa de color azul respecto al eje Y, cuyo reflejo se visualiza en color rojo.

Solución

```
X=[2 4 4 2]
Y=[2 2 4 4]
M=[X;Y]
fill(M(1,:),M(2,:),'b')
hold on
%Reflexion respecto al eje Y
A=[-1 0;0 1]
M1=A*M
fill(M1(1,:),M1(2,:),'r')
grid on
xlim([-8 8])
ylim([-8 8])
```



Casa Feliz

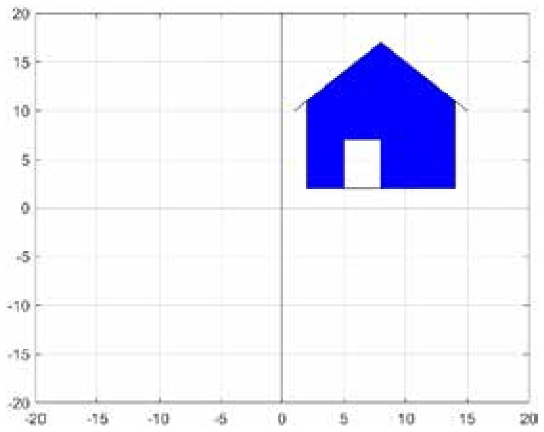
1. Construya la casa que definida por los siguientes puntos: (2;2), (2;11), (1;10), (8;17), (15;10), (14;11), (14;2), (5;2), (5;7), (8;7), (8;2),(2,2), refleje la casa con respecto al eje X.

2. Refleje la casa con respecto al eje Y.

3. Refleje la casa con respecto al origen.
4. Considere la matriz A=[0.5 0.2;0.2 0.5]. ¿Qué hace la transformación dada por la matriz A si se le aplica a los puntos que definen la casa?

Solución

```
x=[2 2 1 8 15 14 14 5 5 8 8 2]
y=[2 11 10 17 10 11 2 2 7 7  2 2]
M=[x;y]
fill(M(1,:),M(2,:),'b')
grid on
xlim([-20 20])
ylim([-20 20])
yline(0)
xline(0)
%Complete para responder los otros items....
```



5.7.3. Rotación en el plano XY

Rotación de un punto A

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Rotar el punto $(1;3)$ en sentido antihorario $\frac{\pi}{3}$.

Solución

```
X=[1;3]
plot(X(1),X(2),'*r')
theta=pi/3
grid on
A=[cos(theta) -sin(theta);sin(theta) cos(theta)]
rot_Y=A*X
hold on
plot(rot_Y(1),rot_Y(2),'*b')
hold off
xlim([-4 4])
ylim([-4 4])
```

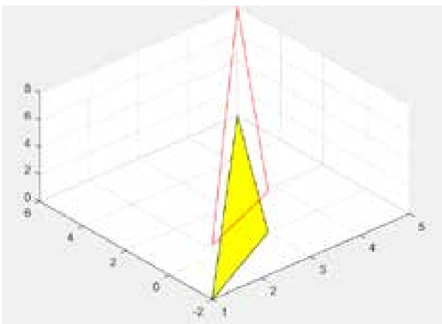
5.7.4. Proyección de espacio al plano XY

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Graficar un triángulo en el espacio cuyos vértices sean $(3;0;3)$, $(1;-2;4)$, $(5;6;8)$; luego, proyectar en el plano XY.



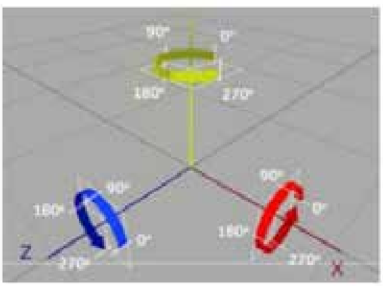
Solución

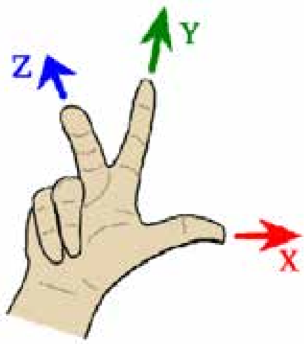
```
X=[3 1 5 3]
Y=[0 -2 6 0]
Z=[3 4 8 3]
P=[X;Y;Z]
%Graficando el triangulo en el espacio
plot3(P(1,:),P(2,:),P(3,:),'r')
grid on
%Matriz Proyeccion en el plano XY
A=[1 0 0;0 1 0;0 0 0]
%Los puntos proyectados
P1=A*P
%Graficando el triangulo proyectado
hold on
plot3(P1(1,:),P1(2,:),P1(3,:),'b')
fill3(P1(1,:),P1(2,:),P1(3,:),'y')
hold off
```

Rotaciones con respecto a los ejes X, Y y Z

En el espacio tridimensional, es posible realizar tres tipos distintos de rotaciones:

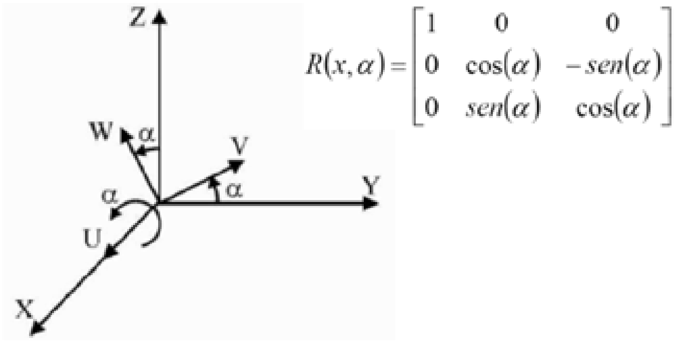
- Rotación alrededor del eje OX.
- Rotación alrededor del eje OY.
- Rotación alrededor del eje OZ.





Rotación en OX

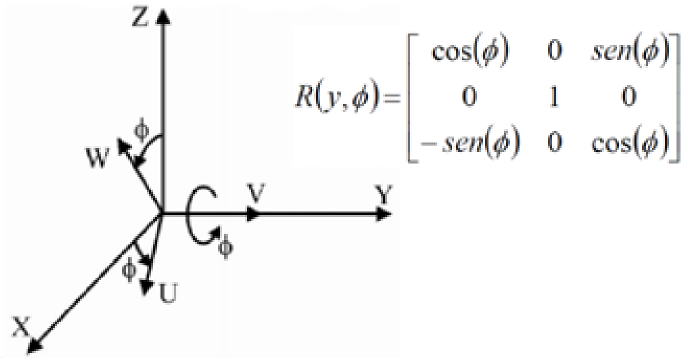
Cuando se realiza una rotación tomando al eje OX como eje de giro, la matriz de rotación $R(x, \alpha)$ adquiere la siguiente forma:




```
function cord=rotacion_x(angu,xyz)
C=cos(angu);
S=sin(angu);
%Rotacion alrededor del eje X
Rx=[1 0 0;0 C  -S; 0 S C];
cord=Rx*xyz;
end
```

Rotación en OY

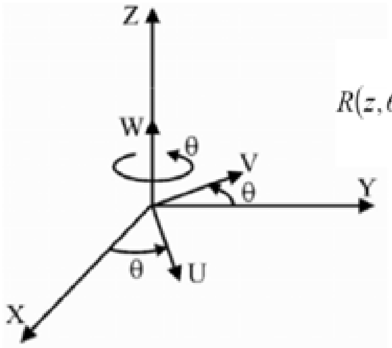
Cuando se realiza una rotación tomando al eje OY como eje de giro, la matriz de rotación $R(y, \phi)$ adquiere la siguiente forma:




```
function cord=rotacion_y(angu,xyz)
C=cos(angu);
S=sin(angu);
%Rotacion alrededor del eje Y
Ry=[C  0 S; 0 1 0; -S 0 C];
cord=Ry*xyz;
end
```

Rotación en OZ

Cuando se realiza una rotación tomando al eje OZ como eje de giro, la matriz de rotación $R(z,\theta)$ adquiere la siguiente forma:



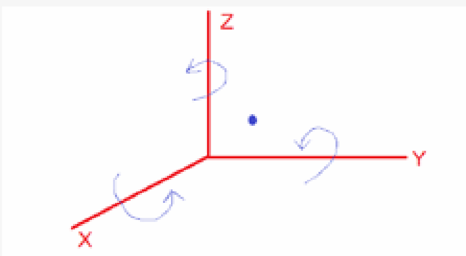
$$R(z,\theta)=\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
function cord=rotacion_z(angu,xyz)
C=cos(angu);
S=sin(angu);
%Rotacion alrededor del eje Z
Rz=[C -S 0;S C 0; 0 0 1]
cord=Rz*xyz;
end
```

Aplicación

Ejemplo

Dado el siguiente gráfico:



Halle la transformación del punto $A(1;2;3)$ luego de rotar alrededor del eje X, 30°, luego respecto del eje Y, 60° y finalmente alrededor del eje Z, 90°. Nota: todas las rotaciones se dan en sentido antihorario.

Solución

```
P=[1;2;3]
P1=rotacion_x(pi/6,P)
P2=rotacion_y(pi/3,P1)
P3=rotacion_z(pi/2,P2)
```

5.7.5. Núcleo de una transformación lineal

Ejemplo

Determine el valor de verdad (V/F):

Si $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$, entonces $\text{Ker}(T) = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$.

Solución:

$$\text{Ker}(T) = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,/\, T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\text{Ker}(T) = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\text{Ker}(T) = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}\right\} \to \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Rpta: (Falso)

```
A=[1 0;0 0]
rank(A)
null(A,'r')
```

Ejercicio

Determine el valor de verdad (V/F):

Si $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$, entonces $\text{Ker}(T) = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$.

Ejemplo

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 2y \\ y + 3z \end{bmatrix}$. Calcule el núcleo de la transformación T.

Solución:
$T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-2y \\ y+3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Aa = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$x - 2y = 0$
$y + 3z = 0$
Existe una variable libre.

Sea $z = t$.
$y = -3t$
$x = -6t$
Por tanto,
$Ker(T) = \left\{ t\begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\} = Gen\left\{\begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$

```
A=[1 -2 0;0 1 3]
rank(A)
null(A,'r')
```

Ejemplo

Dada $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+2y-z \\ y+z \\ x+y-2z \end{bmatrix}$$

Halle el $Ker(T)$.

Solución

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_3 - f_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 + f_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x + 2y - z = 0$
$y + z = 0$
Sea:

$z = t$
$y = -t$
$x = 3t$

$$Ker(T) = Gen \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

```
A=[1 2 -1;0 1 1;1 1 -2]
null(A,'r')
```

Ejercicio

Sean $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ y $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ definida por $T(v) = Av$.
Determine $\ker(T)$.

5.7.6. Imagen de una transformación lineal

Ejemplo

Dada la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y + z \\ 2x + 2y + 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Halle la $Im(T)$.

Solución

Sea:

$v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

¿Es compatible?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$Aa = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & 2 & b \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2-2f_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & b-2a \end{bmatrix}$$

Debe cumplir:

$b - 2a = 0$, para que el sistema sea compatible.

$v = \begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$Im(T) = Gen\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

```
A=[1 1 1;2 2 2]
colspace(sym(A))
```

Ejemplo

Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal cuya matriz asociada es $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & -9 & 6 \end{bmatrix}$. Halle la imagen de T.

Solución

Dado $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ asumimos que existe $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ tal que: $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & -9 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & | & a \\ -3 & -9 & 6 & | & b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & | & a \\ 0 & 0 & 0 & | & 3a+b \end{bmatrix}$$

Se debe cumplir $3a + b = 0$.

$$\text{Im(T)} = \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} / 3a + b = 0\right\} = \left\{\begin{bmatrix} a \\ -3a \end{bmatrix} / a \in \mathbb{R}\right\}$$

```
A=[1 3 -2;-3 -9 6]
colspace(sym(A))
```

Ejemplo

Dada $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ y+z \end{bmatrix}$$

Halle la Im(T).

Solución:

Sea $v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

¿Es compatible?

$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right.$

$A_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \end{bmatrix}$

Siempre es compatible para cualquier valor de a y b.

$v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$Im(T) = Gen\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$dim(Im(T)) = 2.$

```
A=[1 1 0;0 1 1]
colspace(sym(A))
```

5.7.7. Aplicación

Brazo robótico

Se tiene un brazo robótico instalado en un proceso automatizado y, por la tarea que realiza, se han configurado los controladores que accionan los servomotores.

$d(t) = 0.5 + 0.5\sin\left(e^{0.5\sqrt{t}}\right)$ metros.

$\alpha(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\cos(t)$, radianes.

$c = 1.5$ en metros.
t en segundos. Sobre los puntos A y B actúan las transformaciones lineales $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, cuya matriz asociada es:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

y $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con regla de correspondencia

$$T_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y \\ y - x \end{bmatrix}$$

a) El sistema se inicia cuando el brazo asume una posición en el punto A para $t = 1$. Determine el punto A.

b) El brazo robótico situado en el punto A gira $\frac{\pi}{3}$ en sentido antihorario asumiendo una nueva posición en el punto B. Determine el punto B.

c) Si $T_2(C) = B$, halle el punto C.

d) Halle la transformación lineal T_3 tal que $T_3\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = A$ $T_3\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = B$.

e) Halle $\text{Ker}(T_3)$.

f) Halle $\dim(\text{Im}(T_3))$.

Solución
Parte(a)

```
d = 0.5 + 0.5*sin(exp(0.5*sqrt(1)))
c = 1.5
r = d + c
a = pi/4 - pi/4 * cos(1)
A = [r*cos(a); r*sin(a)]
```

Parte(b)

```
M = [cos(pi/3) -sin(pi/3); sin(pi/3) cos(pi/3)]
B = M * A
```

Parte(c)

$$x + 2y = 0.4043$$
$$y - x = 2.4655$$

```
T2 = [1 2; -1 1]
C = linsolve(T2, B)
```

Parte(d)

$T_3(X) = NX$

$$T_3\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = B/4$$

```
N1=A % Vector columna 1 de la matriz N
N2=B/4-A
N=[N1 N2]
```

Parte(e)

```
KerT3=null(N,'r') % KerT3=[0;0]-->Dim(Kert(T3))=0
```

Parte(f)

```
dim_IMAG_T3=2
```

Ejemplo

Sea $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida por

$$S\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ S\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -8 \\ -10 \end{bmatrix}, \ S\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 12 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Justifique que el núcleo de S es:

$$\text{Ker(S)}=Gen\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1.5\\1\end{bmatrix}\right\}$$

Solución

```
y1=[0;0;0;0]
y2=[0;0;0;0]
y3=[-2;-2;-8;-10]
y4=[3;3;12;15]
A=[y1 y2 y3 y4]
Ker_T=null(A,'r')
```

Ejercicio

Verifique que la dimensión de la imagen de la transformación lineal $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x+y+2z\\x-y\\-2x+y-z\\x-y\end{bmatrix}$$

es igual a 2.

Ejercicio

Sea $L:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $L\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1+x_2+x_3\\x_1+2x_2+3x_3\end{bmatrix}$ una transformación lineal.

a) Halle la matriz asociada a la transformación lineal L.

b) Encuentre el núcleo de L.

c) ¿Cuál es la dimensión de la imagen de L?

Ejercicio

Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es otra transformación lineal cuya matriz asociada es $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$, halle la imagen de T.

6. Valores y vectores propios

6.1. Introducción

El puente colgante de Tacoma Narrows

- Este puente colgante tenía 1600 m de longitud.
- El puente formaba pequeñas olas visibles que viajaban a través de toda su estructura.
- Con el paso del tiempo, las ondas empezaron a crecer hasta un punto donde el extremo del puente se encontraba aproximadamente 8 m más abajo que el otro extremo.

Explicación

- Las oscilaciones se formaron porque la frecuencia de las ondas del viento era muy parecida a la del puente, es decir, la frecuencia natural del puente era un valor propio del sistema basado en un sistema que modeló el puente.
- Finalmente, el puente colapsó en 1940. Video

6.2. Definiciones generales

Definición de valor y vector propio

Sea A una matriz de orden $n \times n$. El escalar λ es llamado un valor propio de A si existe un vector $\boldsymbol{v}$ distinto de cero tal que

$$A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

Un vector $\boldsymbol{v}$ de esta naturaleza se conoce como vector propio de A correspondiente al valor propio λ.

Ejemplo

Sean
$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Determine si $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son vectores propios de A. En caso de serlo, identifique el escalar λ correspondiente.

Solución

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 20 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = -4\mathbf{u}$$

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el vector $\mathbf{u}$ es un vector propio de la matriz A, asociado al valor propio (-4). Esto significa que al multiplicar la matriz A por el vector $\mathbf{u}$, el resultado es un múltiplo escalar del vector $\mathbf{u}$, específicamente (-4) veces $\mathbf{u}$. Sin embargo, el vector $\mathbf{v}$ no es un vector propio de la matriz A, ya que al multiplicar A por $\mathbf{v}$, el resultado $A\mathbf{v}$ no es un múltiplo escalar del vector $\mathbf{v}$.

6.3. Cálculo de valores y vectores propios

Ejemplo

Halle los valores propios de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Solución
Se hallan todos los escalares λ tales que el sistema de ecuaciones homogéneo

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

es equivalente a hallar todas las λ, de modo que la matriz $A - \lambda I$ no sea invertible, donde

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{bmatrix}$$

Una matriz no es invertible precisamente cuando su determinante es cero.
Por lo tanto, los valores propios de la matriz A son las soluciones de la ecuación $\det(A - \lambda I) = 0$, donde I es la matriz identidad.
En nuestro caso, tenemos:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Recordemos que el determinante de una matriz 2×2 se calcula como:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Entonces, realizando los cálculos, obtenemos:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (2-\lambda)(-6-\lambda) - (3)(3) \\ &= -12 + 6\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 9 \\ &= \lambda^2 + 4\lambda - 21 \\ &= (\lambda - 3)(\lambda + 7) \end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores propios de A son las soluciones $\lambda = 3$ y $\lambda = -7$ de esa ecuación.

Ejemplo

Mostrar que $\lambda = 7$ es un valor propio de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. Determine los vectores propios correspondientes.

Solución
$\lambda = 7$ es un valor propio de la matriz A, si y solo si la ecuación

$$A\mathbf{x} = 7\mathbf{x}$$

tiene una solución no trivial. Sin embargo, la ecuación anterior es equivalente a $A\mathbf{x} - 7\mathbf{x} = \mathbf{0}$, es decir,

$$(A - 7I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Se forma la siguiente matriz:

$$A - 7I = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$$

Se observa que las columnas de $A - 7I$ son linealmente dependientes, por lo tanto la ecuación anterior tiene soluciones no triviales.
Concluimos: $\lambda = 7$ es un valor propio de la matriz A. Para hallar los vectores propios correspondientes realizaremos operaciones elementales por fila:

$$\begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La solución general es de la forma $t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Los vectores que tienen esa forma con $t \neq 0$ son vectores propios correspondientes a $\lambda = 7$.

- $E_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \ / \ A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$; es llamado **espacio propio** del valor propio λ.
- El espacio propio se conforma por el vector nulo y todos los vectores propios correspondientes a λ.

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$. Un valor propio de A es 2. Determine una base para el espacio propio correspondiente.

Solución

Forme

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

y reduzca por filas la matriz aumentada para $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De la ecuación $(A-2I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, se observa que tiene 2 variables libres t y s, $t,s\in\mathbb{R}$. La solución general es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6.4. Propiedades de valores y vectores propios

Propiedades de valores y vectores propios

- El producto de los valores propios de A es igual al determinante de A.
- La suma de los valores propios de una matriz A es igual a la traza de la matriz A.
- Una matriz es singular si y solo si uno de sus valores propios es igual a cero.
- En una matriz triangular superior o inferior los valores propios (eigenvalues) son simplemente los elementos que se encuentran a lo largo de la diagonal principal de la matriz.
- Si λ es el valor propio de A y A es invertible, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es un valor propio de la matriz A^{-1}.

Teorema

Los elementos que se encuentran en la diagonal principal de una matriz triangular son los valores propios de dicha matriz.

Ejemplo

Sean $A=\begin{bmatrix} 3 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Halle los valores propios de la matriz A y B.

Solución

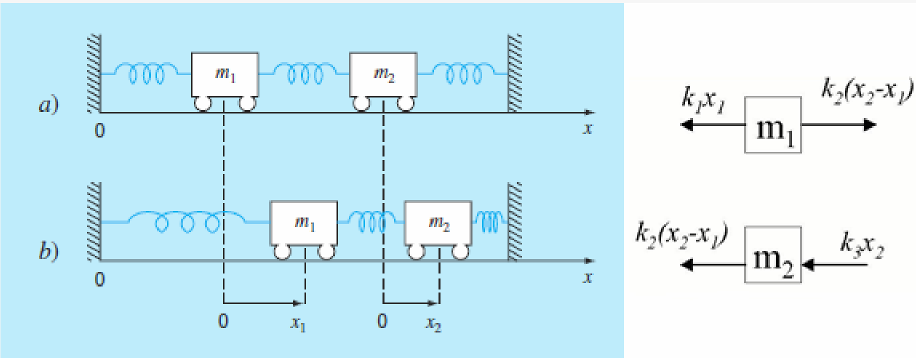
Los valores propios de A son 3, 0 y 2 . Los valores propios de B son 4 y 1.

Teorema

Si se tienen vectores propios $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ correspondientes a diferentes valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ de una matriz cuadrada A de orden $n \times n$, entonces el conjunto formado por dichos vectores propios $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ es linealmente independiente.

6.5. Aplicación: Sistema masa resorte

Ejemplo: Sistema masa resorte



En la figura se muestran dos masas interconectadas a través de tres resortes entre dos paredes. Se considera que las masas se deslizan sin fricción y que cada resorte obedece a la ley de Hooke (su extensión o comprensión x y la fuerza F están relacionadas por la fórmula $F = -kx$). Adicionalmente, se debe tener en cuenta que cada resorte tiene la misma longitud natural y la misma constante de resorte k. Si los desplazamientos hacia la derecha x_1 y x_2 de las dos masas (desde sus respectivas posiciones de equilibrio) son todos positivos, entonces:

- El primer resorte se estira en la distancia x_1.
- El segundo resorte se estira en la distancia $x_2 - x_1$.
- El tercer resorte se comprime en la distancia x_2.

Aplicando la ley de Newton $F = ma$, a las dos masas, obtenemos el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' &= -k(x_2 - x_1) - kx_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

Forma matricial:

$$Mx'' = Kx \quad (2)$$

Vector de desplazamiento: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$;

Matriz de masas: $M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$

K: **Matriz de rigidez**

De la teoría de vibraciones, se conoce que las soluciones de la ecuación (1) pueden tomar la forma

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \sin(\omega t) \\ A_2 \sin(\omega t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde A_i = la amplitud de la vibración de la masa i; ω = la frecuencia de la vibración que es igual a: $\omega = \frac{2\pi}{T_p}$; T_p : es el periodo.

Forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{2k}{m_1} & \frac{k}{m_1} \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{2k}{m_2} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{v}} = \underbrace{-\omega^2}_{\lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{v}}$$

Lo que llamamos el problema de los **valores propios**

$$A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

6.6. Multiplicidad algebraica y geométrica

Multiplicidad algebraica y geométrica

Sea A una matriz de orden $m \times m$ y sea λ_0 un valor propio de A. Se llama:

a) **Multiplicidad algebraica** de λ_0: la denotamos como $m_a(\lambda_0)$ y la definimos como la raíz del polinomio característico de A, $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$. Luego, podemos factorizar $p(\lambda)$ como

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{m_a(\lambda_0)} q(\lambda)$$

siendo $q(\lambda)$ un polinomio (de grado $m - m_a(\lambda_0)$) que no se anula en $\lambda = \lambda_0$, es decir, $q(\lambda_0) \neq 0$.

b) **Multiplicidad geométrica** de λ_0: la denotamos por $m_g(\lambda_0)$ y la definimos como la dimensión del espacio nulo de $A - \lambda_0 I$.

$$\dim[\text{Null}(A - \lambda_0 I)] = m - \text{rango}[(A - \lambda_0 I)]$$

Luego, la multiplicidad geométrica es igual al número (máximo) de vectores propios linealmente independientes asociados al valor propio.

Ejemplo

La matriz A de orden 5×5 tiene como polinomio característico a

$$p(\lambda) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^3.$$

De ello se obtiene la siguiente información:

Valores propios de A	0	1	2
Multiplicidad algebraica	1	1	3

Ejemplo

Dada la siguiente matriz

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Su polinomio característico es

$$p(\lambda) = -(\lambda - 5)^2(\lambda - 1).$$

Halle los valores propios y sus respectivas multiplicidades algebraica y geométrica.

Solución

Resolvemos el sistema homogéneo para $\lambda = 5$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$S_5 = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Resolvemos el sistema homogéneo para $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$S_1 = \mathrm{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

Finalmente:

λ	$m_a(\lambda)$	$m_g(\lambda)$
5	2	1
1	1	1

6.7. Matrices semejantes

Matrices semejantes

Se dice que una matriz B es semejante a una matriz A, si existe una matriz no singular P tal que:

$$B = P^{-1}AP$$

Ejemplo

Consideremos las siguientes matrices:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Determine si B es semejante a A.

Solución
Podemos afirmar que B es semejante a A, dado que:

$$B = P^{-1}AP$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.8. Diagonalización

Diagonalización

Se denominará matriz diagonalizable a aquella matriz A que sea semejante a una matriz diagonal, es decir, que exista una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ resulte ser una matriz diagonal.

Ejemplo

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, A es diagonizable, dado que es semejante a B.

Teorema

Si dos matrices son semejantes, entonces tienen los mismos valores propios.

Teorema

Una matriz cuadrada A de orden $n \times n$ será diagonizable si y solo si tiene n vectores propios linealmente independientes.

Teorema

Si el polinomio característico de una matriz cuadrada A de orden $n \times n$ tiene todas sus raíces diferentes (es decir, no hay valores propios repetidos), entonces A es diagonizable.

Observación: Si A es una matriz diagonizable, $P^{-1}AP = D$, donde D es matriz diagonal, los elementos de la diagonal de D son los valores propios de A. Además, la matriz P es una matriz cuyas columnas son, respectivamente, n vectores propios linealmente independientes de A. El orden de las columnas de la matriz P determina el orden de las entradas de la diagonal de la matriz D.

Ejemplo

Demostrar que la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ es diagonalizable.

Solución
Para los valores propios $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$ les corresponden los vectores propios $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ respectivamente, que son linealmente independientes. Por lo tanto, la matriz A es diagonizable. Luego: $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.
En consecuencia:
$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
Sea A una matriz $n \times n$.

Si A tiene n valores propios distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ y $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son los vectores propios asociados, entonces

$$D = V^{-1}AV$$

- D es matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- $V = (v_1|v_2|\ldots|v_n)$ tiene como columnas a los vectores propios.

6.9. Aplicaciones con MatLab

6.9.1. Valores y vectores propios

Hallaremos los valores propios (λ) y los vectores propios (v) que satisfacen por definición a la ecuación

$$Av = \lambda v$$

1. Defina en MatLab la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Defina las variables R y D, las cuales van a ser asignadas a los vectores y valores propios de la matriz A. Estos valores son retornados por la función $eig(A)$ y su sintaxis se muestra a continuación:

   - eig(A): halle todos los valores propios de A.
   - $[R, D]$=eig(A) : halle los vectores propios y valores propios de A. Donde, los vectores columna de R corresponden a los valores propios λ en D.

3. **Interpretación:** la función eig(A) proporciona dos salidas. La primera es una matriz donde cada columna representa un vector propio de la matriz A. La segunda salida es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal corresponden a los respectivos valores propios asociados a los vectores propios obtenidos.

4. **Observación:** un vector propio debe satisfacer $Av = \lambda v$, donde A es una matriz, v es el vector propio y λ es el valor propio. Esto lo podemos experimentar en MatLab multiplicando la matriz A por el primer vector propio y luego multiplicando dicho vector por el primer valor propio. Así:

   - Se realiza el producto de la matriz A por la primera columna de la matriz R, la cual contiene el primer vector propio. Esta operación se expresa como $A * R(:, 1)$.
   - Se multiplica el primer elemento de la diagonal principal de la matriz D, el cual corresponde al primer valor propio, por la primera columna de la matriz R, que contiene el primer vector propio asociado. Esta operación se representa como $D(1, 1) * R(:, 1)$.
   - Repetir el mismo proceso para los otros valores propios. Luego, queda comprobado que $Av = \lambda v$.

```
%Valores y Vectores Propios
clc
A=[4 7 2;3 1 6;2 1 9]
vp=eig(A)
[Q,D]=eig(A)
D(1,1)*Q(:,1) % lambda1*v1
A*Q(:,1) %A*v1
D(2,2)*Q(:,2) %lambda2*v2
A*Q(:,2) %A*v2
```

6.9.2. Espacio propio del valor propio

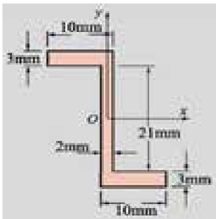
1. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$

   Determine el espacio propio de cada valor propio de la matriz A.

```
A=[4 -1 6;2 1 6;2 -1 8]
L=eig(A)
for k=1:length(L)
Ownspace=null(A-L(k)*eye(length(A)),'r')
end
%Ownspace
[Q,~]=eig(A)
```

6.9.3. Aplicación de valores y vectores propios

Determine los momentos principales de inercia y la orientación de los ejes principales de inercia para el área de la sección transversal que se muestra en la figura:



Los momentos de inercia I_x, I_y y el producto de inercia I_{xy} son:

$$I_x = 10228.5 \text{ mm}^4, \qquad I_y = 1307.34 \text{ mm}^4 \qquad \text{y} \qquad I_{xy} = -2880 \text{ mm}^4.$$

Ayuda: en forma matricial, la matriz de momento de inercia bidimensional es dada por:

$$I_{Inercia} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix}$$

Los momentos principales de inercia y la orientación de los ejes principales de inercia se pueden calcular resolviendo el siguiente problema de valores propios:

$$I_{inercia} u = \lambda u$$

donde los valores propios λ son los momentos principales de inercia y los vectores propios asociados u son vectores unitarios en la dirección de los ejes principales de inercia.

7. Problemas resueltos

7.1. Examen parcial 2022-1(A)

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F) según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

1. [**2 ptos**] Si la matriz A admite una factorización LU, donde:

   $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ entonces el determinante de A es igual a 6.

   Solución:
   Como la matriz A admite su factorización $A = LU$ y tanto L como U son matrices triangulares, aplicando propiedades del determinante tenemos:

   $$\det A = \det L \times \det U = (1 \cdot 1 \cdot 1) \times (2 \cdot 1 \cdot 3) = 6$$

   por lo tanto, la afirmación es **verdadera.**

2. [**2 ptos**] La siguiente matriz

   $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   tiene como rango igual a 2.

Solución:
Por definición, el rango de una matriz en su forma escalonada es el número de filas no nulas, por lo que en este caso el rango de la matriz es 3. Por lo tanto, el enunciado es **falso.**

PROCEDIMENTAL

3. [**3 ptos**] Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

a. Forme la matriz ampliada Aa y llévela a su forma escalonada.
Solución:
Trabajando con la matriz ampliada para resolver el SEL homogéneo planteado:

$$\left[A \middle| \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 3 & 0 & -1 & | & 3 \\ 3 & -2 & 3 & | & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_1} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 3 & -2 & 3 & | & 7 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\xrightarrow{f_3 \to f_3 - f_1} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 4 & | & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_3 + 2f_2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 6 \end{bmatrix}$$

b. Resolver el sistema de ecuaciones.
Solución:
Del ítem anterior tenemos la forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 6 \end{bmatrix}$$

Entonces:

- $2x_3 = 6 \to x_3 = 3$
- $x_2 - 3 = 1 \to x_2 = 4$
- $3x_1 - 3 = 3 \to 3x_1 = 6 \to x_1 = 2$

4. [**3 ptos**] Halle la factorización QR de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Solución:
Aplicando el método de Gram-Schmidt tenemos:

- Hacemos: $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ entonces $q_1 = \frac{v_1}{||v_1||} \to q_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$
- Luego: $v_2 = a_2 - (a_2 \cdot q_1)q_1 \to v_2 = \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$ entonces $q_2 = \begin{matrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{matrix}$

Encontrando R, que es triangular: $r_{11} = a_1 \cdot q_1 = 3, r_{22} = a_2 \cdot q_2 = 3, r_{12} = a_2 \cdot q_1 = 0$, así:

$$A = QR = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

APLICACIONES

1. **(Pequeña empresa)** Un taller de carpintería produce sillas, mesas redondas y mesas cuadradas. El proceso de elaboración de cada una de ellas se divide en tres etapas: lijado, pintura y barnizado. Las sillas requieren 1 minuto en cada etapa; las mesas redondas, 2 minutos de lijado, 1 minuto de pintura y 1 minuto de barnizado; y las mesas cuadradas, 1 minuto de lijado, 1 minuto de pintura y 3 minutos de barnizado. Las máquinas disponibles para cada etapa tienen diferentes tiempos: 5 horas para el lijado, 4 horas para la pintura y 6 horas para el barnizado. ¿Cuántos muebles de cada tipo puede hacer el taller si las maquinas se usan en toda capacidad?

   a) [**3 ptos**] Si $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ denota las cantidades de sillas, mesas redondas y mesas cuadradas. Complete la siguiente tabla

Tipo mueble	Lijado	Pintura	Barnizado
Silla			
Mesa redonda			
Mesa cuadrada			

y luego formule un sistema de ecuaciones lineales en forma matricial $Ax = b$, cuya solución permita determinar las cantidades de muebles de cada tipo.

Solución:

Tipo mueble	Lijado	Pintura	Barnizado
Silla	1	1	1
Mesa redonda	2	1	1
Mesa cuadrada	1	1	3

Luego, según los datos tenemos:

1) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \cdot 60 = 300$
2) $x_1 + x_2 + x_3 = 4 \cdot 60 = 240$
3) $x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \cdot 60 = 360$

Llevándolo a su forma matricial: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 240 \\ 360 \end{bmatrix}$

b) [**3 ptos**] Reordene las ecuaciones de tal manera que tomen la forma

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + a_{13}x_3 &= 5 \\ x_1 + a_{22}x_2 + x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

donde todos los coeficientes son enteros positivos.

Solución:

Del ítem anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \cdot 60 = 300 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \cdot 60 = 240 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \cdot 60 = 360 \end{aligned}$$

c) [**4 ptos**] Resuelva el sistema de ecuaciones lineales planteado en el ítem anterior utilizando el método de eliminación gaussiana sin pivoteo.

Solución:

Trabajando con la matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 300 \\ 1 & 1 & 1 & 240 \\ 1 & 1 & 3 & 360 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2 \to f_2 - f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 300 \\ 0 & -1 & 0 & -60 \\ 1 & 1 & 3 & 360 \end{array}\right]$$

Luego:

$$\xrightarrow{f_3 \to f_3 - f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 300 \\ 0 & -1 & 0 & -60 \\ 0 & -1 & 2 & 60 \end{array}\right] \xrightarrow{f_3 \to f_3 - f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 300 \\ 0 & -1 & 0 & -60 \\ 0 & 0 & 2 & 120 \end{array}\right]$$

Entonces:

- $2x_3 = 120 \to x_3 = 60$
- $-x_2 = -60 \to x_2 = 60$
- $x_1 = 300 - x_3 - 2x_2 \to x_1 = 120$

7.2. Examen parcial 2022-1(B)

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F) según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

1. [2 **ptos**] Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = QR$, donde

$$Q = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se verifica que Q es una matriz ortogonal.

Solución:
Evaluamos el producto:

$$Q^t Q = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la afirmación es verdadera y Q es una matriz ortogonal.

2. [**2 ptos**] Dada la inversa de la matriz A, es decir: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, el determinante de la matriz A es igual a $\frac{1}{18}$.
Solución
Por propiedad:

$$\det\left(A^{-1}\right) = 3 \cdot 1 \cdot 6 = 18 \to \det(A)\det\left(A^{-1}\right) = 1 \to \det(A) = \frac{1}{18}$$

PROCEDIMENTAL

3. [**3 ptos**] Sea el sistema homogeneo, $Ax = 0$, definido por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a. Lleve la matriz A a su forma escalonada y determine su rango.
Solución:
Llevándola a su forma escalonada, tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_2 \to f_2 + 3f_1]{f_4 \to f_4 - 2f_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2 \Longleftrightarrow f_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el rango de la matriz es 2.

b. Determine cuál o cuáles de los dos vectores

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pertenece(n) al espacio nulo de la matriz A.

Solución:
Calculando los productos, tenemos:

$$1)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}]$$

Por lo tanto, ambos vectores pertenecen al espacio nulo de la matriz A.

4. [**3 ptos**] Use la factorización LU de la matriz A:

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -4 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 \qquad + 6x_3 &= -22 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Solución:
Resolviendo:

$$LUx = b \to Ux = z \to Lz = b$$

Tenemos:

$$3z_1 = -3 \to z_1 = -1$$

$$2z_1 + 4z_2 = -22 \to z_2 = -5$$

$$-4z_1 - z_2 + 2z_3 = 3 \to z_3 = 3$$

Ahora resolvemos $Ux = z$, tenemos:

$$x_3 = z_3 \to x_3 = -3$$

$$x_2 + 2x_3 = -5 \to x_2 = 1$$

$$x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \to x_1 = -2$$

APLICACIONES

5. **Logística (10p).** Una empresa de transportes gestiona una flota total de 60 camiones de tres modelos diferentes (grandes, medianos y pequeños). Los camiones grandes transportan diariamente en promedio 15 tn y recorren 400 km. Los camiones medianos transportan diariamente en promedio 10 tn y recorren 300 km. Finalmente, los camiones pequeños transportan diariamente en promedio 5 tn y recorren 100 km. Todos los días, los camiones de la empresa transportan un total de 475 tn y recorren 12500 km. entre todos. ¿Cuántos camiones gestiona la empresa de cada modelo?

   a) [**3 ptos**] Dado $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, el cual denota las cantidades de camiones grandes, medianos y pequeños. Complete la siguiente tabla

Tipo de camión	Recorrido diario	Carga diaria
Grande		
Mediano		
Pequeño		

   y luego formule un sistema de ecuaciones lineales cuya solución permita determinar las cantidades de camiones de cada tipo.

   Solución:

   Completando la tabla:

Tipo de camión	Recorrido diario	Carga diaria
Grande	400	15
Mediano	300	10
Pequeño	100	5

   Se forma el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 400x_1 + 300x_2 + 100x_3 &= 12500 \\ 15x_1 + 10x_2 + 5x_3 &= 475 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 60 \end{aligned}$$

   Observación: estas ecuaciones pueden aparecer en distintas posiciones.

   b) [**3 ptos**] Simplifique el sistema de ecuaciones obtenido en (a) y reordénelo de tal manera que sea igual al sistema de ecuaciones mostrado:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 60 \\ 3x_1 + a_{22}x_2 + x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + 3x_2 + a_{33}x_3 &= 125 \end{aligned}$$

donde todos los coeficientes son enteros positivos.
Solución:
Reordenando:

$$\begin{aligned} 400x_1 + 300x_2 + 100x_3 &= 12500 \\ 15x_1 + 10x_2 + 5x_3 &= 475 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 60 \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 60 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 95 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 125 \end{aligned}$$

c) [**4 ptos**] Luego de plantear el sistema de ecuaciones del ítem (b) en su forma matricial $Ax = b$, resuelva utilizando la matriz inversa de A.
Sugerencia: tome en cuenta la siguiente igualdad:
$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Solución:
Sabemos lo siguiente:

$$Ax = b \rightarrow A^{-1} \cdot Ax = A^{-1} \cdot b \rightarrow x = A^{-1} \cdot b$$

Entonces:
$$x = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 95 \\ 125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 25 \\ 30 \end{bmatrix}$$

7.3. Examen final 2022-1

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

1. [**2 ptos**] El conjunto de vectores $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ conforma una base de $\mathbb{R}^3$, para todo $a \neq 0$.

Solución:
Se debe plantear:

$$\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+\theta\begin{bmatrix}1\\a\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

pues al tener un conjunto de tres vectores en $\mathbb{R}^3$ basta probar que estos son linealmente independientes, lo podemos resolver formando la matriz ampliada o planteando las ecuaciones:

$$\alpha+\beta+\theta=0$$

$$2\alpha+\theta a=0$$

$$3\alpha+\beta+\theta=0$$

De la primera y tercera ecuación tenemos: $\alpha=0$, en la segunda ecuación:

$$2(0)+\theta a=0\rightarrow\theta a=0\rightarrow\theta=0$$

En la primera ecuación:

$$\alpha+\beta+\theta=0\rightarrow0+\beta+0=0\rightarrow\beta=0$$

Por lo tanto, los vectores son linealmente independientes y forman una base de $\mathbb{R}^3$.
La afirmación es verdadera (V).

2. [**2 ptos**] Si $T:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ es una transformación lineal que satisface:

$$T\left(\left[\begin{array}{c}1\\1\end{array}\right]\right)=\left[\begin{array}{c}1\\1\end{array}\right],\ T\left(\left[\begin{array}{c}2\\1\end{array}\right]\right)=\left[\begin{array}{c}-1\\7\end{array}\right],\text{ entonces }\ T\left(\left[\begin{array}{c}4\\5\end{array}\right]\right)=\left[\begin{array}{c}7\\1\end{array}\right]$$

.

Solución:

Podemos escribir:

$$\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

Aplicando la transformación lineal T a todos los miembros de esa igualdad, tenemos:

$$T\left(\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}\right) = 6T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) - 1T\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)$$

Usando los datos de la prueba, tenemos:

$$T\left(\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}6\\6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\-1\end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la afirmación es falsa (F).

PROCEDIMENTAL

3. [**3 ptos**] Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) [2P] Halle las multiplicidades algebraica y geométrica de las raíces del polinomio característico.

Hallando el polinomio característico, tenemos:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Luego, tenemos:

$$(1-\lambda)^2 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

Por lo tanto, decimos que la multiplicidad algebraica del valor propio $\lambda = 1$ es 2.

Para encontrar la multiplicidad geométrica, encontramos la dimensión del espacio propio asociado. Para ello resolvemos:

$$Av = \lambda v$$

luego:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Así:

$$v_1 + 2v_2 = v_1 \rightarrow v_2 = 0$$

Luego, el espacio asociado está generado por:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la multiplicidad geométrica es 1.

b) [1P] ¿Es posible diagonalizar la matriz A? Justifique su respuesta.

Al ser las multiplicidades algebraica y geométrica distintas, decimos que no es posible diagonalizar la matriz A.

4. [**3 ptos**] Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida mediante:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & 3 & 2 \\ 2 & b & 2 \\ 4 & 14 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

tal que $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 22 \end{bmatrix}$

a [**0.5 ptos**] Calcular a, b y c.

b [**2 ptos**] Encuentre una base del núcleo de la transformación lineal.

c [**0.5 ptos**] Determine la dimensión de la imagen de la transformación lineal.

1) Para calcular a, b, c efectuamos:

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+3+2 \\ 2+b+2 \\ 4+14+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Entonces: $a = 1, b = 7, c = 4$

2) Formamos la matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 2 & 7 & 2 & | & 0 \\ 4 & 14 & 4 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Efectuamos las siguientes operaciones $f_2 \to f_2 - 2f_1$ y $f_4 \to f_4 - 4f_1$, de las que resulta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 2 & -4 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, hacemos $f_3 \to f_3 - 2f_2$, tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

De aquí $y = 2z$ y $x + 6z + 2z = 0 \rightarrow x = -8z$, por lo tanto, si $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in Ker(T)$ una base para el núcleo es generada por el vector $\begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

3) Por el teorema de la dimensión:

$$3 = dimKer(T) + dimIm(T) \rightarrow dimIm(T) = 2$$

APLICACIONES

Una cadena de Markov o **proceso de Markov** es aquel en el que la probabilidad de que el sistema esté en un estado particular en un periodo de observación dado depende solamente de su estado en el periodo de observación inmediato anterior.
La matriz $T = [t_{ij}]$ de $n \times n$, es llamada **matriz de transición** de la cadena de Markov. Las entradas en cada columna de T son no negativas y deben sumar 1. Así la entrada t_{ij} representa la probabilidad de que si el sistema se encuentra en el estado j en cierto periodo de observación, estará en el estado i en el siguiente.
Si T es la matriz de transición, **el vector de estado** x_{k+1} en el $(k+1)$-ésimo periodo de observación puede determinarse a partir del vector de estado x_k en el k-ésimo periodo de observación como $x_{k+1} = Tx_k$.
La ecuación anterior se puede expresar como: $x_{k+1} = T^{k+1}x_0$. Observe que la matriz de transición y el vector de estado inicial, x_0, determinan por completo todos los demás vectores de estado. Los vectores de estado convergen en un vector fijo, denominado **vector de estado estacionario**, cuando el número de periodos de observación aumenta. En este caso decimos que el proceso de Markov ha alcanzado el equilibrio.
Se puede demostrar que el proceso alcanza su estado estacionario cuando $Tu = u$ (esto es, u es un vector propio de T con valor propio asociado $\lambda = 1$) y además u debe satisfacer que sus componentes sumen 1 (ya que es un vector de probabilidades). Para hallar el vector u se recomienda resolver el sistema lineal homogéneo $(T - 1I)u = 0$ seleccionando de las infinitas soluciones del sistema aquel u cuyas componentes suman 1.

5. **[10 ptos]** Un psicólogo del comportamiento lleva a cabo un experimento diario con una rata en una jaula que tiene dos puertas, A y B. La rata tiene la opción de pasar por la puerta A, en cuyo caso recibirá una descarga eléctrica, o por

la puerta B, donde obtendrá alimento. Se registra la puerta por la que pasa la rata. Al inicio del experimento, en un lunes, la rata tiene la misma probabilidad de pasar por cualquiera de las dos puertas. Después de recibir una descarga eléctrica al pasar por la puerta A, la probabilidad de que la rata vuelva a pasar por la misma puerta al día siguiente es de 0.3. Sin embargo, si la rata pasa por la puerta B y recibe alimento, la probabilidad de que vuelva a pasar por esa misma puerta al día siguiente es de 0.6.

a) [**5 ptos**] La matriz de transición para el proceso de Markov es:

$$T = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Halle el vector de estado estacionario (recuerde que el vector de estado estacionario es el vector propio de T asociado al valor propio $\lambda = 1$ y cuyas componentes suman 1).

b) [**4 ptos**] Tomando $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}$ ¿para qué valor de k se llega al vector estacionario?

c) [**1 pto**] ¿Cuál es la probabilidad de que la rata pase por la puerta A el jueves (el tercer día después de comenzar el experimento)?

Escriba aquí la solución de la pregunta 5

1. Se tiene $(T - 1I)U = 0$, por lo tanto:

$$\left(\begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   En consecuencia:

$$\begin{bmatrix} -0.7 & 0.4 \\ 0.7 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

   De esto $4v_2 = 7v_1$, pero $v_1 + v_2 = 1 \rightarrow v_1 = \frac{4}{11}, \ v_2 = \frac{7}{11}$.

2. En este ítem, tomamos $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}$, luego comenzamos:

   - $x_1 = Tx_0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.36 \\ 0.64 \end{bmatrix}$

- $x_2 = Tx_1 \to \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.36 \\ 0.64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.364 \\ 0.636 \end{bmatrix}$
- $x_3 = Tx_2 \to \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.364 \\ 0.636 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3636 \\ 0.6364 \end{bmatrix}$

Vemos que para $k = 3$ se llegó al vector estacionario.

3. La probabilidad de que la rata pase por la puerta A el jueves es de $0.3636 \cong \frac{4}{11}$

7.4. Examen parcial 2022-2(A)

CONCEPTUALIZACIÓN

Responda verdadero (V) o falso (F) según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

1. [2 **ptos**] Determine para qué valores reales de η la matriz A no posee inversa, A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & \alpha & \gamma & 56 \\ 0 & -5 & 3\delta & \chi & 6 \\ 0 & 0 & \eta^2+1 & 76 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \eta^2-1 & \eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Solución:
La matriz A es triangular superior, por lo tanto, para que la matriz no posea inversa, basta que $\det(A) = 0$, aplicando las propiedades tenemos:

$$4 \cdot (-5) \cdot (\eta^2+1) \cdot (\eta^2-1) \cdot (-6) = 0$$

$$(\eta^2-1) = 0 \to \eta = -1, 1$$

Por lo tanto, los valores que puede tomar η son $-1, 1$.

2. [2 **ptos**] Dado el sistema de ecuaciones $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$, el espacio nulo asociado a su matriz de coeficientes tiene un único elemento.

Solución:
Si $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ pertenece al espacio nulo de la matriz de coeficientes del sistema, entonces:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De aquí $v_1 + v_2 = 0 \rightarrow v_2 = -v_1$; por lo tanto, los elementos del espacio nulo de la matriz de coeficientes tienen la forma:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ -v_1 \end{bmatrix}$$

con $v_1 \in \mathbb{R}$, finalmente, el espacio nulo tiene infinitos elementos.

PROCEDIMENTAL

3. [**3 ptos**] Sea A la matriz dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) [**2 ptos**] Mediante operaciones elementales, lleve la matriz A a su forma escalonada Ea.
Solución:
Efectuando las siguientes operaciones a la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_2 \leftarrow f_2 + 3f_1]{f_3 \leftarrow f_3 - 2f_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) [**1 pto**] Usando la matriz Ea obtenida en el ítem anterior, compruebe que el vector $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ pertenece al espacio nulo de Ea.

Solución:
Veamos si se cumple la relación $Ea \cdot v = \overline{0}$, entonces:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. [**3 ptos**] Considere el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ x_1 + kx_2 + 4x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + (k+2)x_3 &= 6 \end{aligned}$$

donde k es una constante.

a) [**1.5 ptos**] ¿Para qué valores de k el sistema tiene solución única?
Solución:
Formando la matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & k & 4 & 6 \\ 1 & 2 & k+2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[f_2 \leftarrow f_2 - f_1]{f_3 \leftarrow f_3 - f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & k-2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k-1 & 2 \end{array}\right]$$

Si $k \neq 1, 2$, el sistema tiene solución única, pues por el teorema de Rouché-Frobenius, el rango de la matriz de coeficientes coincidirá con el de la matriz ampliada, que será igual a 3.

b) [**1.5 ptos**] ¿Para qué valores de k no tiene solución el sistema?
Solución:
De acuerdo al ítem anterior, para que no tenga solución $k = 1$.

APLICACIONES

5. **Fábrica de tabletas [10 puntos]**
La fábrica de tabletas *UNIVERSE* de última generación produce 3 modelos de las mismas, denominadas Hope, Cosmos y World. Para emsamblar una tableta del modelo Hope se requiere, cada semana, 4 horas en el área de ensamblado, 8 horas en el área de control de calidad y 4 horas en el área de

instalación de software y aplicaciones. Para cada tableta del modelo Cosmos se requiere, por semana, 4 horas en el área de ensamblado, 10 horas en el área de control de calidad y 8 horas en el área de instalación de software y aplicaciones. Para el modelo World se requiere, cada semana, 11 horas en el área de ensamblado, 7 horas en el área de control de calidad y 9 horas en el área de instalación de software y aplicaciones. La fábrica dispone semanalmente de 1550 horas para el emsamblado, 2550 horas para el control de calidad y 1850 horas para el área de instalación de software y aplicaciones, debiendo usarse toda la disponibilidad de horas. Con esta información desarrolle las siguientes acciones:

a) [**3 ptos**] Defina las variables involucradas y modele el sistema de ecuaciones resultante de forma algebraica y de forma matricial ($AX = b$), cuya solución permita encontrar el número de tabletas de las marcas Hope, Cosmos y World que debe producir la fábrica semanalmente. Considere $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

Solución:

Definimos:

1) x_1: nro de tabletas de la marca Hope.
2) x_2: nro de tabletas de la marca Cosmos.
3) x_3: nro de tabletas de la marca World.

Se forman las ecuaciones:

$$\text{Ensamblado: } 4x_1 + 4x_2 + 11x_3 = 1550$$

$$\text{Control de calidad: } 8x_1 + 10x_2 + 7x_3 = 2550$$

$$\text{Software: } 4x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 1850$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 11 \\ 8 & 10 & 7 \\ 4 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1550 \\ 2550 \\ 1850 \end{bmatrix}$$

b) [**3 ptos**] Descomponga la matriz A según Doolittle y muestre L y U explícitamente.

Solución:
Luego de efectuar las operaciones por **filas** tenemos:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 11 \\ 8 & 10 & 7 \\ 4 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1]{f_3 \leftarrow f_3 - f_1} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 11 \\ 0 & 2 & -15 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_3 \leftarrow f_3 - 2f_2]{.} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 11 \\ 0 & 2 & -15 \\ 0 & 0 & 28 \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 11 \\ 0 & 2 & -15 \\ 0 & 0 & 28 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

c) [**4 ptos**] Si se conoce que el sistema encontrado en el ítem a) tiene solución única, utilice la descomposición LU encontrada en b) para resolverlo, mostrando explícitamente las respectivas resoluciones por sustitución directa y regresiva de $LZ = b$ y $UX = Z$. Recuerde $Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$.

Solución:
Hacemos $Ax = b \rightarrow LUx = b \rightarrow Lz = b$, quedando:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1550 \\ 2550 \\ 1850 \end{bmatrix}$$

Por sustitución directa: $z_1 = 1550, z_2 = -550, z_3 = 1400$. Finalmente, $Ux = z$, tenemos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 11 \\ 0 & 2 & -15 \\ 0 & 0 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1550 \\ -550 \\ 1400 \end{bmatrix}$$

Tenemos: $x_1 = 150, x_2 = 100, x_3 = 50$.

7.5. Examen parcial 2022-2(B)

CONCEPTUALIZACIÓN

Responda verdadero (V) o falso (F) según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

1. [**2 ptos**] Sea Q una matriz cuadrada. Si Q es una matriz ortogonal, entonces siempre se verifica $det(Q) = 1$.
   Solución:
   Por ser Q matriz ortogonal
   $Q \times Q^T = I$
   $det(Q) \times det(Q^T) = det(I) = 1$

   Además, $det(Q) = det(Q^T)$

   Finalmente, reemplazamos en la penúltima ecuación
   $det(Q)^2 = 1 \rightarrow det(Q) = \pm 1$

   Rpta: F.

2. [**2 ptos**] Sea A una matriz cuadrada. Al aplicar el método de factorización QR se obtuvo

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{69}{175} & * \\ \frac{3}{7} & * & -\frac{6}{175} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{35} & \frac{33}{35} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & -35 \end{bmatrix}$$

   donde $*$, representa dígitos que no se digitaron. Si se sabe que $det(Q) > 0$, entonces se tiene que $det(A) = -85750$
   Solución:
   Por factorización QR
   $A = Q \times R \rightarrow det(A) = det(Q) \times det(R)$

   Tomando en cuenta lo obtenido en la pregunta 1, $det(Q) = \pm 1$ y por dato del problema $det(Q) > 0$, reemplazamos

   $det(A) = 1 \times [14 \times 175 \times (-35)] \rightarrow det(A) = -85750$

   Rpta: V.

PROCEDIMENTAL

3. [**3 puntos**] Determine para qué valores de a, con $a \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones lineales tiene solución única

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + ax_3 &= 8 \end{aligned}$$

Solución:

Expresando la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{rrrcr} 2 & -1 & 4 & | & 7 \\ 2 & -2 & 1 & | & 0 \\ 2 & 6 & a & | & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[f_3 \to f_3 - f_1]{f_2 \to f_2 - f_1} \left[\begin{array}{rrrcr} 2 & -1 & 4 & | & 7 \\ 0 & -1 & -3 & | & -7 \\ 0 & 7 & a-4 & | & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrrcr} 2 & -1 & 4 & | & 7 \\ 0 & -1 & -3 & | & -7 \\ 0 & 7 & a-4 & | & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_3 \to f_3 + 7f_2} \left[\begin{array}{rrrcr} 2 & -1 & 4 & | & 7 \\ 0 & -1 & -3 & | & -7 \\ 0 & 0 & a-25 & | & -48 \end{array}\right]$$

Para que el sistema de ecuaciones lineales tenga solución única

$ran(A) = ran(Ab) = 3$

$a - 25 \neq 0 \to a \neq 25$

Entonces: $a = \mathbb{R} - 25$

4. [**3 puntos**] La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ es invertible y tiene su inversa de la forma: $A^{-1} = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$. Hallar el valor de s.

Solución:

Para una matriz A cuadrada de orden 2×2

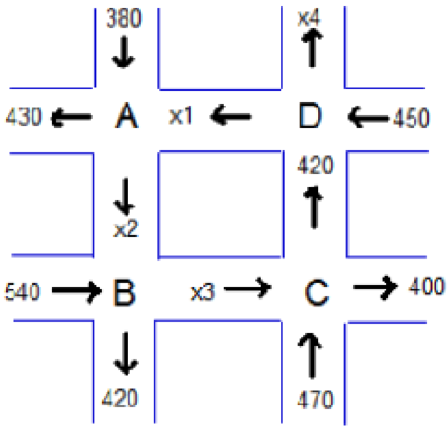
$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Reemplazando,

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \to s = -3$$

APLICACIONES

5. **Tráfico en la ciudad [10 puntos]** El problema de la congestión vehicular en determinados puntos de la ciudad a ciertas horas (llamadas hora punta) genera grandes pérdidas económicas. Para aliviar el tránsito generando desvíos en puntos específicos de la ciudad se realizan mediciones del flujo de tránsito por dichos puntos. En el gráfico se muestran 4 intersecciones A, B, C y D con alto tránsito entre las 7 am y 8 am. El volumen de tráfico promedio por hora de vehículos que entran y salen en cada una de las 4 intersecciones de las calles está dado por las cantidades mostradas en la figura. Suponiendo que el flujo total de vehículos que ingresa a una intersección es igual al flujo total de vehículos que sale de dicha intersección, determine el flujo de vehículos dado por x_1, x_2, x_3 y x_4.



a) **[3 ptos]** Defina las variables involucradas y modele el sistema de ecuaciones resultante de forma algebraica y de forma matricial ($Ax = b$). Considere $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

Solución:
Evaluando el flujo de vehículos en las intersecciones D, A, B, C:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_4 &= 870 \\
x_1 + 380 &= x_2 + 430 \\
x_2 + 540 &= x_3 + 420 \\
x_3 + 470 &= 820
\end{aligned}
$$

El sistema de ecuaciones de forma algebraica es:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_4 &= 870 \\
x_1 - x_2 &= 50 \\
x_2 - x_3 &= -120 \\
x_3 &= 350
\end{aligned}
$$

y el sistema de ecuaciones de forma matricial $Ax = b$ es:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 870 \\ 50 \\ -120 \\ 350 \end{bmatrix}
$$

b) [**4 ptos**] Resuelva el sistema de ecuaciones planteado en el ítem anterior, utilizando el método de eliminación gaussiana sin pivoteo.
Solución:
Expresando la matriz aumentada

$$
\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 870 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -120 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 350 \end{array}\right]
\xrightarrow{f_3 \to f_3 + f_4}
\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 870 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -120 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 350 \end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 870 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 230 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 350 \end{array}\right]
\xrightarrow{f_2 \to f_2 + f_3}
\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 870 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 280 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 230 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 350 \end{array}\right]
$$

Por sustitución regresiva,
$x_3 = 350, \quad x_2 = 230, \quad x_1 = 280 \quad$ y $\quad x_4 = 590$

c) [**3 ptos**] Si en la intersección B el flujo de salida 420 se anula (es decir, cambia al valor cero), reformule y resuelva el nuevo sistema de ecuaciones.
Solución
Evaluando el flujo de vehículos en las intersecciones D,A,B,C:

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 870 \\ x_1 + 380 &= x_2 + 430 \\ x_2 + 540 &= x_3 \\ x_3 + 470 &= 820 \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones de forma algebraica es:

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 870 \\ x_1 - x_2 &= 50 \\ x_2 - x_3 &= -540 \\ x_3 &= 350 \end{aligned}$$

Por sustitución regresiva,
$x_3 = 350, \quad x_2 = -190, \quad x_1 = -140 \quad$ y $\quad x_4 = 1010.$

7.6. Examen final 2022-2(A)

CONCEPTUALIZACIÓN

Responda Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

1. [**2 ptos**] Si $B = \left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, entonces todo vector en $\mathbb{R}^3$ puede ser representado como una combinación lineal de e_1, e_2 y e_3.
Solución:
Los vectores unitarios e_1, e_2 y e_3 son l.i., además coincide el número de vectores (3) con la $\dim(\mathbb{R}^3)$, por lo tanto, todo vector en $\mathbb{R}^3$ se puede representar

como combinación lineal de e_1, e_2 y e_3.
Rpta: V.

2. [**2 ptos**] Si T es una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que satisface

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

y siendo A la matriz que representa a la transformación T, entonces $det(A) = -2$.

Solución:

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = A_{2x2}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Por propiedad de transformaciones lineales:

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = A_{2x2}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Usando el segundo dato del problema obtenemos:

$$A_{2x2}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$a = 1$ y $c = 3$.

Del segundo dato del problema obtenemos:

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 3 & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$b = 2$ y $d = 4$.

Finalmente,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad det(A) = -2$$

Rpta: V.

PROCEDIMENTAL

3. [3 **ptos**] Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

y R el triángulo cuyos vértices son: $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 9 \end{bmatrix}$.

Se establece que la relación entre las áreas de los triángulos está dada por:

$$\frac{S(Q)}{S(R)} = det(M)$$

donde:

- M es la matriz que representa a la transformación T.
- $S(Q)$ es el área del triángulo Q y $S(R)$ es el área del triángulo R.

Calcule $S(Q)$.

Solución:
El área del triángulo Q viene dada por:

$$S(Q) = \det(M) \times S(R)$$

La matriz asociada a la transformación es $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Se halla el área del triángulo R graficando:

$$S(R) = \frac{3 \times 7}{2} = 10.5 \to S(Q) = 10.5 \times 4 = 42u^2$$

4. [3 **ptos**] Sea $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por:

$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

a. [**1.5 ptos**] Encuentre una base para el Ker(L).

Solución:
$A\vec{u} = \vec{0}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[f_3 \to f_3 - 2f_1]{f_2 \to f_2 - f_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$u_3 = u_4$ y $u_1 = u_3 - 3u_4 \to u_1 = -2u_3$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2u_3 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_3 \end{bmatrix} = u_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Ker(L) = Gen \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

b. [**0.5 ptos**] ¿Cuál es la dimensión de la imagen de L?

Solución:
$A\vec{u} = \vec{v}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & a \\ 1 & 0 & 0 & 2 & b \\ 2 & 0 & -1 & 5 & c \end{array}\right] \xrightarrow[f_3 \to f_3 - 2f_1]{f_2 \to f_2 - f_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & a \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & -1 & c-2a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{f_3 \to f_3 - f_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & a \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-b-a \end{array}\right]$$

Para encontrar la solución: $c - b - a = 0 \quad \to \quad c = a + b$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ a+b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Im(L) = Gen \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \to \quad dim(Im(L)) = 2$$

.c [**1 pto**] El vector $z = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ pertenece a la imagen de L?.

Solución:

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para a=b=1 se cumple que z es combinación lineal de los vectores base de la imagen de L.

APLICACIONES

5. **Potencia de matrices [10 puntos]**
La estabilidad de los sistemas mecánicos, los cuales pueden ser representados mediante una ecuación diferencial lineal matricial, adopta la forma $\dot{X} = AX$. Este sistema está regulado por los valores propios de la matriz A. Para un sistema donde la matriz A es igual a:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Un método alternativo para calcular la potencia n de una matriz A de orden 3×3 (es decir, A^n), siempre y cuando ella sea diagonalizable, está dado por el siguiente algoritmo:

- Hallar los valores propios λ_1 , λ_2 y λ_3, tales que $(\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3)$.
- Hallar los respectivos vectores propios v_1 , v_2 y v_3.

- Construir la matriz $P = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]$ y hallar su inversa P^{-1}
- Construir la matriz $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$
- Finalmente, calcular $A^n = PD^nP^{-1}$

Aplique el procedimiento descrito para calcular A^5. Para ello:

a) [**3 ptos**] Halle el polinomio característico de A, así como sus valores propios indicando la multiplicidad algebraica de cada uno.
Solución:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)[-\lambda(2-\lambda)]$$

polinomio característico:

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda$$

De la penúltima expresión igualamos a 0 para obtener los autovalores,

$$p(\lambda) = (2-\lambda)[-\lambda(2-\lambda)]$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 2$

La multiplicidad algebraica del autovalor 0 es 1.
La multiplicidad algebraica del autovalor 2 es 2.

b) [**4 ptos**] Halle los respectivos vectores propios asociados a cada valor propio hallado en el ítem anterior. Indique las multiplicidades geométricas de cada valor propio.
Solución:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

Para $\lambda_1 = 0$:

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v_1} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2 \to f_2 - \frac{1}{2} f_1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$z = 0 \quad , \quad x = 0 \quad$ y $\quad y \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 2$:

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v_2} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda_2 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$x = 2y - z$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y - z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{v_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La multiplicidad geométrica de λ_1 es 1.
La multiplicidad geométrica de λ_2 es 2.

c) [**3 ptos**] Halle A^5 utilizando el algoritmo descrito en la parte introductoria.

Dato: $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solución:

$$A^5 = PD^5P^{-1}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad D^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$$

7.7. Examen final 2022-2(B)

CONCEPTUALIZACIÓN

Responda verdadero (V) o falso (F) según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

1. [2 **ptos**] Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal, entonces para v_1 y v_2 en V se cumple que $T(v_1 - v_2) = T(v_1) - T(v_2)$.
   Solución:
   Por las propiedades de transfomación lineal:
   $T(v_1 + (-v_2)) = T(v_1) + T(-v_2) = T(v_1) + (-1 \times T(v_2)) = T(v_1) - T(v_2)$
   Rpta: V.

2. [2 **ptos**] Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida mediante

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & a & 1 \\ b & -2 & 2 \\ -6 & 3 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

   Si $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ pertenece al núcleo de la transformación lineal T, entonces $a+b+c =$ 0.
   Solución:

Se debe cumplir:

$$\begin{matrix} 2 & a & 1 \\ b & -2 & 2 \\ -6 & 3 & c \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3+3a \\ b-4 \\ 3+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow a=-1, b=4, c=-3$$

Entonces $a+b+c=0$

Rpta: v.

PROCEDIMENTAL

3. [**2 ptos**] Si $B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ ¿qué relación deben cumplir a y b?

Solución:

Los vectores deben ser l.i.:

$$\alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde $\alpha = \beta = 0$

$$2\alpha + a\beta = 0 \rightarrow a = \frac{-2\alpha}{\beta}$$

$$4\alpha + b\beta = 0 \rightarrow b = \frac{-4\alpha}{\beta}$$

4. [**4 ptos**] Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 \end{bmatrix}$ una transformación lineal.

   a) [**1 pto**] Halle la matriz asociada a la transformación lineal T.

   Solución:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

b) [**2 pto**] Halle la imagen de la transformación T ($Im(T)$).
Solución:

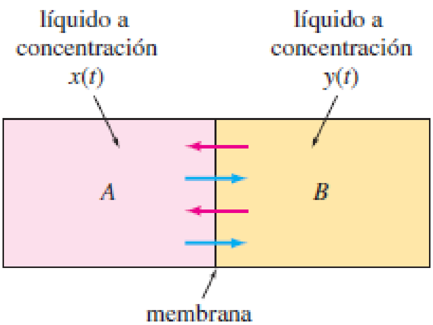
$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & 3 & 5 & b \end{array}\right] \xrightarrow{f2 \to f2 - \frac{1}{2}f1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & 5/2 & 9/2 & b - a/2 \end{array}\right]$$

APLICACIONES

5. [**10 puntos**]
La figura que se muestra es una representación seccional del interior y exte-



rior de una célula. Al llenarse de líquido, los compartimentos A y B se separan mediante una membrana que permite el paso de los líquidos (es decir, es una membrana permeable). Suponga que un nutriente necesario para el crecimiento de la célula pasa por la membrana, entonces, un modelo para determinar las concentraciones, en microgramos, $x(t)$ y $y(t)$ del nutriente en los compartimentos A y B, respectivamente, en el tiempo t, se expresa mediante el sistema de ecuaciones diferencial lineal siguiente:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{V_A}(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{V_B}(x - y)$$

donde V_A y V_B son los volúmenes de los compartimentos y $k > 0$ es un factor de permeabilidad. Sobre la base de la información brindada, desarrolle lo que se solicita a continuación.

a) [**3 ptos**] Si el sistema de ecuaciones diferenciales que modela la situación se escribe en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

determine la matriz M en la forma $M = 2.5 \times 10^{-4} \begin{bmatrix} m & p \\ q & r \end{bmatrix}$, con $m, p, q, r \in \mathbb{Z}$. Considere $V_A = 200\mu^3$, $V_B = 200\mu^3$, $k = 0.05$, y las unidades de $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ están dadas en microgramos por micra cúbica por unidad de tiempo.

Indicación: μm representa a la unidad de medidad de longitud denominada micra, que equivalen a una millonésima parte de un metro.
Solución:
Reemplazando según los datos:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{V_A}(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{V_B}(x - y)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = 2.5 \times 10^{-4} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

así: $M = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

b) [**3 ptos**] Determine los autovalores, λ_1, λ_2, de la matriz M que se ha encontrado en el acápite anterior. Preséntelos en la forma $\lambda_1 = 2.5 \times 10^{-4} a$, $\lambda_2 = 2.5 \times 10^{-4} b$, identificando los valores de a y b; a, $b \in \mathbb{Z}$. ¿Cuál es la multiplicidad algebraica de cada uno de los autovalores?

Solución:
Operando $|A - \lambda I| = 0$, tenemos:

$$\lambda_1 = -5 \times 10^{-4} \qquad \lambda_2 = 0$$

Luego, tenemos $a = -2, b = 0$. La multiplicidad algebraica de cada autovalor es 1.

c) [**4 ptos**] Determine los autovectores v_1, v_2 asociados a cada autovalor de la matriz M, respectivamente.
Si se conoce que

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

¿cuál es la concentración $x(t)$ y $y(t)$ del nutriente en cada compartimento A y B, respectivamente, al tiempo t?
Indicación: Reemplace todos los valores encontrados y considere c_1 y c_2 como constantes arbitrarias.
Solución
Formando la expresión para $\lambda_1 = 5 \times 10^{-4}$:

$$2.5 \times 10^{-4} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = -5 \times 10^{-4} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2v_1 \\ -2v_2 \end{bmatrix}$$

así $v_1 = -v_2$ y $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$ y el autovector asociado a λ_1 es $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Formando la expresión para $\lambda_2 = 0$, tenemos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

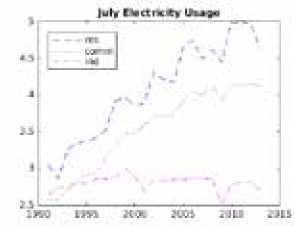
de aquí $v_1 = v_2$, entonces el autovector asociado a λ_2 es $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Reemplazando en lo solicitado, tenemos:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-5t \times 10^{-4}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

8. Aprendizaje basado en casos

8.1. TAP1 2022-1

El consumo de electricidad para los sectores económicos residencial, comercial e industrial está guardado en el siguiente archivo electricity.mat (lo puede ubicar en MathWorks). Dicha información se puede representar en el siguiente gráfico:



Los datos de consumo representan el consumo eléctrico de EE.UU. para diferentes años en el mes de julio. Los datos de consumo están en 10^9 kWh/día, y los datos de precios están en centavos de dólar por kWh.

1. Cargue el archivo electricity.mat y asigne la matriz **usage** a la variable *M*.

```
M = usage
```

2. Los datos residenciales se almacenan en la primera columna. Cree una variable *res* que contenga la primera columna de *M*.

```
res = M(:,1)
```

3. Los datos comerciales y los datos industriales se almacenan en la segunda y tercera columna, respectivamente. Cree las variables *comm* e *ind*, que contendrán la segunda y tercera columna de *M*.

```
comm = M(:,2)
ind = M(:,3)
```

4. Extraiga de la matriz M una submatriz que contenga los elementos de la primera a la cuarta fila, y desde la 15ava fila hasta la 20ava fila de la matriz M, y de la segunda a la tercera columna de la matriz M y asígnele la variable N.

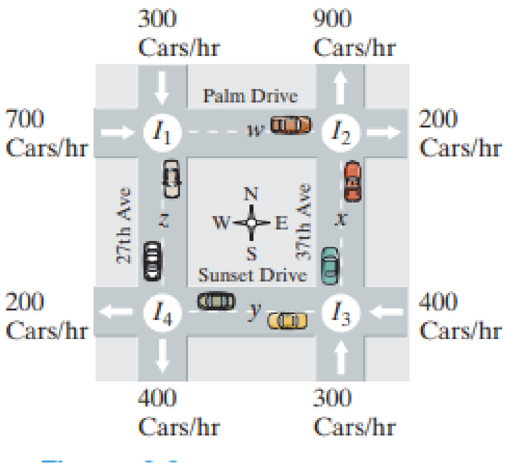
```
N = M([1:4 15:20],2:3)
```

5. Cree un vector llamado yrs que represente los años desde 1991 hasta 2013. Grafique res vs yrs, $comm$ vs yrs y ind vs yrs en un solo gráfico con sus respectivas etiquetas y leyendas.

```
yrs = 1991:1:2013
hold on
plot(yrs,res)
plot(yrs,comm)
plot(yrs,ind)
title("July Electricity Usage")
ylabel("")
legend("res", "comm", "ind")
```

8.1.1. Operaciones elementales, consistencia de sistemas: Caso B

La siguiente figura muestra las intersecciones de cuatro calles de sentido único. Observe que 300 automóviles por hora ingresan a la intersección desde el norte en 27th Avenue. Además, 200 automóviles por hora se dirigen hacia el este desde la intersección en Palm Drive. Las variables w, x, y y z representan el número de autos que circulan entre las intersecciones.
Considere que en cada intersección el número de autos que entran por hora debe ser igual al número de autos que salen por hora. Use esta idea para establecer un sistema de ecuaciones lineales que describa el flujo del tráfico, el cual involucre a las variables w, x, y y z.



1. Formule el sistema de ecuaciones en la forma matricial $Ax = b$ que describe el flujo del tráfico.

```
%Escribe aqui la solucion, todo distinto al codigo, a modo ...
    comentario
% w + z = 1000
% w + x = 1100
% x + y = 700
% y + z = 600

A = [1 0 0 1; 1 1 0 0; 0 1 1 0; 0 0 1 1]
b = [1000; 1100; 700; 600]
Ab = [A b]
```

2. Utilizando operaciones elementales por filas, transforme la matriz A en una matriz escalonada; seguidamente, determine su rango y determinante.

```
A(2,:) = A(2,:) - A(1,:)
A(3,:) = A(3,:) - A(2,:)
A(4,:) = A(4,:) - A(3,:)
rank(A)
det(A)
```

3. Utilizando operaciones elementales por filas, transforme la matriz A en una matriz escalonada reducida. Compare su resultado con el comando **rref** de MatLab.

```
A = [1 0 0 1; 1 1 0 0; 0 1 1 0; 0 0 1 1]
A(2,:) = A(2,:) - A(1,:)
A(3,:) = A(3,:) - A(2,:)
A(4,:) = A(4,:) - A(3,:)
A = [1 0 0 1; 1 1 0 0; 0 1 1 0; 0 0 1 1]
rref(A)
% Utilizando operaciones elementales por filas se llega al ...
    mismo resultado
% que utilizando el comando rref de Matlab
```

4. Determine si el sistema de ecuaciones tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución. Justifique adecuadamente su respuesta.

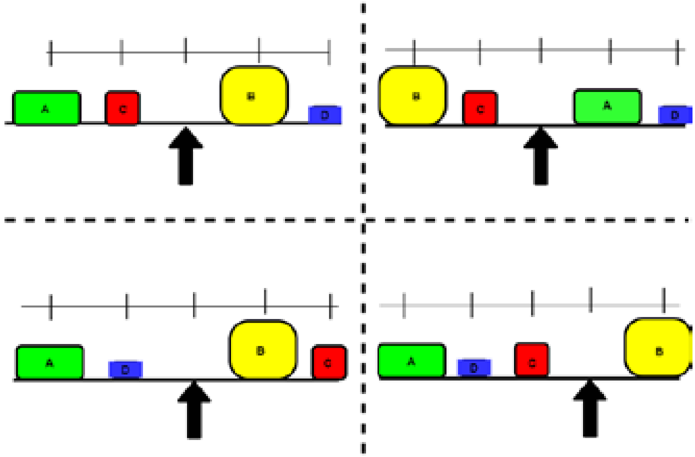
```
Ab(2,:) = Ab(2,:) - Ab(1,:)
Ab(3,:) = Ab(3,:) - Ab(2,:)
Ab(4,:) = Ab(4,:) - Ab(3,:)
rank(Ab) % r' = rank(A|b)
rank(A) % r = rank(A)
RoucheFrobenius(A,b)
```

5. Si una construcción en la 27th Avenue limita z a 50 autos por hora, ¿cuántos autos por hora deben pasar en las otras intersecciones para que el tráfico fluya?

```
% Si z limita a 50 carros la hora
% w + 50 = 1000
% w = 950 carros por hora
% w + x = 1100
% x + y = 700
% y + 50 = 600
% y = 550 carros por hora
% Si una construccion limita z a 50 autos por hora w & y ...
    serian afctados,
% con un incrmento de 950 carros para w y 550 carros para y.
```

8.1.2. Espacio nulo-condicionamiento: Caso D

Considerando el concepto de momento, para que un sistema de masas (como el mostrado en la figura) se mantenga en equilibrio, se requiere que la sumatoria de momentos respecto a un punto (en el caso de la figura el punto hacia donde apunta la flecha) sea igual a cero. Suponga que se tiene cuatro bloques cuyas masas están representadas por A, B, C y D (en kg) y están dispuestos en diferente orden en cada una de las 4 situaciones mostradas. Además se sabe que las distancias señaladas son todas iguales a 1m. Se plantea el problema de hallar las masas de los 4 bloques, suponiendo que en todos los casos el sistema de bloques se mantiene en equilibrio.



1. Teniendo en cuenta que todas las configuraciones mostradas se encuentran en equilibrio, formule un sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas A, B, C y D (en dicho orden) en forma algebraica y matricial cuya solución permita hallar las masas de los bloques (que están denotadas precisamente por A, B, C y D).

```
% 2A + C = B +2D
% 2B + C = A + 2D
% 2A + D = B + 2C
% 3A + 2D + C = B

% 2A -B + C -2D = 0
% -A + 2B + C - 2D = 0
% 2A - B -2C + D = 0
% 3A - B + C + 2D = 0

% Ax = b
A = [2 -1 1 -2; -1 2 1 -2; 2 -1 -2 1; 3 -1 1 2]
b = [0; 0; 0; 0]
Ab = [A b]
```

2. Verifique si los vectores $v = (0; 1; 0; 1)^T$ y $w = (2; 1; 0; 1)^T$ pertenecen o no al espacio nulo de la matriz de coeficientes del sistema planteado en el ítem anterior justifique cuidadosamente su respuesta.

```

v = [0; 1; 0; 1]
w = [2; 1; 0; 1]

% Mostrar si el vector v pertenece al espacio nulo
Av = A*v
% El vector v no pertenece al espacio nulo porque Av es ...
    diferente a cero.

% Mostrar si el vector v pertenece al espacio nulo
Aw = A*w
% El vector w no pertenece al espacio nulo porque Av es ...
    diferente a cero.
```

3. Halle la solución del sistema (utilizando comandos de MatLab: linsolve e inv) y luego interprete la solución obtenida de acuerdo al contexto presentado.

```
%Escribe aqui la solucion, todo distinto al codigo, a modo ...
    comentario

X =linsolve(A,b)
% X = linsolve(A,B) resuelve la ecuacion matricial AX = B, ...
    donde B es un vector columna.
% A partir de X, x1 = 0, x2 = 0, x3 = 0 y x4 = 0.

Y = inv(A)
% Y = inv(X) calcula la inversa de la matriz cuadrada X.
% una interpretacion es que este sistema es imposible en un ...
    contexto real.
```

4. Fijando la masa del bloque D en 10 kg, formule un nuevo sistema de 4 ecuaciones en las incógnitas A, B y C, y luego de identificar su matriz aumentada o ampliada Aa, verifique si los vectores $v = (1; 2; 2; 1)^T$ y $w = (0; 1; 2; 1)^T$ pertenecen o no al espacio nulo de Aa y justifique cuidadosamente su respuesta.

```
% D = 10
% 2A -B + C = 20
% -A + 2B + C = 20
% 2A - B -2C = -10
% 3A - B + C = -20

A = [2 -1 1; -1 2 1; 2 -1 -2; 3 -1 1]
b = [20; 20; -10; -20]
Aa = [A b]
linsolve(A,b)
```

```
vn = [1; 2; 2; 1]
wn = [0; 1; 2; 1]

% Mostrar si el vector vn pertenece al espacio nulo
Aav = Aa*vn
% El vector vn no pertenece al espacio nulo porque Aav es ...
    diferente a cero.

% Mostrar si el vector wn pertenece al espacio nulo
Aaw = Aa*wn
% El vector wn no pertenece al espacio nulo porque Aaw es ...
    diferente a cero.
```

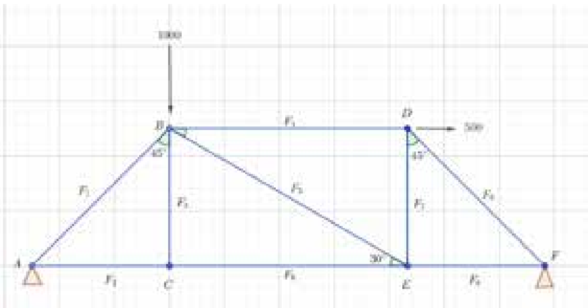
5. Halle el condicionamiento de las matrices de coeficientes de los sistemas planteados en los ítemes a) y d), luego comente acerca de los valores obtenidos.

```
cond(Ab)
cond(Aa)

%Al salirnos una cifra diferente a 1 significa que la ...
    matriz Ab esta mal condicionada,
% por esta razon se produce perturbaciones y grandes ...
    cambios significativos.
```

8.1.3. Eliminación gaussiana - Factorización: Caso E

Cálculo de las fuerzas en una armadura plana. Una armadura es un elemento estructural compuesto por barras esbeltas, cuyos extremos se suponen conectados a las juntas por medio de pernos sin fricción. Es utilizada para soportar cargas, como en puentes o edificios. Generalmente las barras de armadura se ensamblan con patrones triangulares, que es la configuración geométrica estable más simple.

En la gráfica se muestra una armadura donde hay 6 articulaciones, o también conocidas como juntas, y nueve barras.
Las fuerzas actúan hacia el centro de la barra, lejos de la articulación y están indicadas a lo largo de cada una de las barras. Como podrá notar, hay nueve fuerzas en las barras, F_i, $i = 1, 2, \cdots, 9$.



Al hacer cero la suma de todas las fuerzas que actúan horizontal o verticalmente en cada una de las articulaciones, es posible escribir las nueve ecuaciones, tal como se muestra a continuación:

$$
\begin{aligned}
\cos(45°)\,F_1 - F_4 - \cos(30°)\,F_5 &= 0\\
\sin(45°)\,F_1 + F_3 + \sin(30°)\,F_5 &= -1000\\
F_2 - F_6 &= 0\\
-F_3 &= 0\\
F_4 - \sin(45°)\,F_9 &= 500\\
F_7 + \cos(45°)\,F_9 &= 0\\
\cos(30°)\,F_5 + F_6 - F_8 &= 0\\
\sin(30°)\,F_5 + F_7 &= 500\\
F_8 + \cos(45°)\,F_9 &= 0
\end{aligned}
$$

1. Plantee el sistema de ecuaciones matricial $Ax = b$; seguidamente, resuelva el sistema de ecuaciones usando el método de eliminación gaussiana con pivoteo. Indicar todos los pasos durante el desarrollo.

```
A = [cosd(45) 0 0 -1 -cosd(30) 0 0 0 0; sind(45) 0 1 0 ...
    sind(30) 0 0 0 0;...
0 1 0 0 0 -1 0 0 0; 0 0 -1 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 1 0 0 0 0 ...
    -sind(45);...
0 0 0 0 0 0 1 0 cosd(45); 0 0 0 0 cosd(30) 1 0 -1 0;...
0 0 0 0 sind(30) 0 1 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 1 cosd(45)]
b = [0; -1000; 0; 0; 500; 0; 0; 500; 0]
```

```
% Usando funcion gausspivo
Aa = [A b]
[Ea,nb]=gausspivo(A,b)
```

2. Determine la factorización $PA = LU$ de la matriz de coeficientes A, utilizando el comando *lu* de MatLab.

```
[L,U] = lu(A)
[L, U, P] = lu(A)
```

3. Considerando que L y U son las matrices triangular inferior y superior obtenidas en el paso anterior, resuelva el sistema $LUx = Pb$, usando solo los métodos de sustitución hacia atrás y hacia adelante. Indique su solución paso a paso.

```
[L, U, P] = lu(A)

% LU = PA
L*U
P*A

% Ax = b
% PAx = pb
% LUx = Pb

% Resolvemos los dos sistemas triangulares
% Ly = Pb --> Sustitucion directa
% Ux = Y --> Sustitucion regresiva

y = sustidir(L,P*b)
x = sustireg(U,y)
```

4. Realice la factorización QR de la matriz A.

```
[Q,R]=myQR(A)
disp('Q*R')
Q*R
```

5. Resuelva el sistema $Ax = b$ mediante el método QR.

```
% Resolviendo
% Ax = b
```

```
% QRx = b
% Q^TQRx = Q^Tb
% por dato: Q^TQ = I
% Rx = Q^Tb


A = [cosd(45) 0 0 -1 -cosd(30) 0 0 0 0; sind(45) 0 1 0 ...
    sind(30) 0 0 0 0;...
     0 1 0 0 0 -1 0 0 0; 0 0 -1 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 1 0 0 0 0 ...
        -sind(45);...
     0 0 0 0 0 0 1 0 cosd(45); 0 0 0 0 cosd(30) 1 0 -1 0;...
     0 0 0 0 sind(30) 0 1 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 1 cosd(45)]
b = [0; -1000; 0; 0; 500; 0; 0; 500; 0]
x = sustireg(R,Q'*b)
```

Funciones utilizadas en clase

```
function [Ea,nb]=gausspivo(A,b)
n=size(A,2);
Aa=[A b];
for i=1:n-1
   [maxi,pos]=max(abs(Aa(i:n,i)))
    Aa([i+pos-1 i],:)=Aa([i i+pos-1],:)
    pivo=vpa(Aa(i,i));
    for j=i+1:n
        mij=vpa(Aa(j,i)/pivo); %Multiplicadores
        Aa(j,:)=vpa(Aa(j,:)-mij*Aa(i,:));
    end
end
Ea=vpa(Aa(:,1:n));
nb=vpa(Aa(:,n+1));
end
```

```
function []=RoucheFrobenius(A,b)
[m,n]=size(A);
Aa=[A b];
RangA=rank(A);
RangAa=rank(Aa);
if (RangAa ~= RangA)
    fprintf('El sistema no tiene solucion \n')
elseif (RangA==n)
    fprintf('El sistema tiene solucion unica \n')
else
    fprintf('El sistema tiene infinitas soluciones\n')
end
end
```

```
function [x]=sustidir(L,b)
[m,n]=size(L);
x=zeros(n,1);
for k=1:n
x(k)=(b(k)-sum(L(k,1:k-1)*x(1:k-1)))/L(k,k);
end
end
```

```
function [x]=sustireg(U,b)
% U: Matriz triangular superior
[m,n]=size(U);
x=zeros(n,1);
for k=n:-1:1
x(k)=(b(k)-sum( U(k,k+1:n)*x(k+1:n) ))/U(k,k);
end
end
```

```
function [Q,R]=myQR(A)
[m,n]=size(A);
Q=zeros(m,n);
R=zeros(n,n);
for j=1:n     % Gram-Schmidt orthogonalization
    a=A(:,j); % a begins as column j of A
    for i=1:j-1
        R(i,j)=Q(:,i)'*A(:,j);
        a=a-R(i,j)*Q(:,i);
    end
    R(j,j)=norm(a);
    Q(:,j)=a/R(j,j); %normalize a to be next unit vector q
end
end
```

8.2. TAP2 2022-1

8.2.1. Combinación lineal y base (I)

Cierta empresa dedicada a la minería cuenta con dos yacimientos. Las actividades de un día en la mina I generan mineral que contiene 20 tn de cobre y 550 kg de plata, mientras que en la mina II, las actividades de un día producen mineral que contiene 30 tn de cobre y 500 kg de plata.

Sean $v_1 = \begin{bmatrix} 20 \\ 550 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} 30 \\ 500 \end{bmatrix}$. Entonces,

v_1 y v_2 representan el rendimiento diario de las minas 1 y 2, respectivamente.

1. **[1pt]** ¿Qué interpretación económica puede dársele al vector $5v_1$?
   La interpretación económica del $5v_1$ es que la v_1 representa el rendimiento diario de la mina I y la variable en escalar representa la cantidad de días. Por lo tanto, la combinación es el número de días, en la producción de cobre en toneladas métricas y plata en kilogramos en la mina 1.
   Al realizar la verificación en MatLab, concluimos que en la mina I en 5 días se producirá 100 tn de cobre y 2750 kg de plata.

2. **[1pt]** Suponga que una compañía minera opera dos minas diferentes, mina I y mina II. Queremos determinar cuántos días deben trabajar en cada mina para producir 150 tn de cobre y 2825 kg de plata. Supongamos que la compañía trabaja x_1 días en la mina I y x_2 días en la mina II. Escriba un sistema de ecuaciones vectoriales cuya solución proporcione los valores de x_1 y x_2 que satisfagan los requisitos de producción dados.
   Para hallar el número de días de la mina I y II que debe trabajarse para que se produzca 150 tn de cobre y 2825 kg de plata utilizamos la siguiente función:

$$x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 = p$$

   Donde, x_1 y x_2 representan los días, v_1 y v_2; el rendimiento de las minas I y II; y p, la cantidad de producción en los x días. Por lo tanto, quedaría en forma de matriz como:

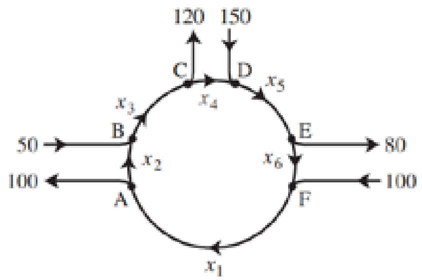
$$\begin{bmatrix} 20 & 30 \\ 550 & 500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 2825 \end{bmatrix}$$

3. **[1pt]** Resuelva la ecuación del apartado anterior usando cualquier método de los estudiados anteriormente.

```
A=[20  30 ; 550 & 500]
B[150 ; 2825]
x=linsolve(A,B)
```

8.2.2. Combinación lineal y base (II)

A menudo, en Francia las intersecciones se construyen en forma de rotonda con un solo sentido, como indica la figura. Suponga que el tráfico debe moverse en la dirección mostrada.



1. [**2pts**] Encuentre la solución general del flujo de la red y el mínimo valor posible para x_6.

Formando las ecuaciones, junto con las condiciones de no negatividad

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0$$

Tenemos:

1. $A : x_1 = 100 + x_2$
2. $B : 50 + x_2 = x_3$
3. $C : x_3 = 120 + x_{44}$
4. $D : x_4 + 150 = x_5$
5. $E : x_5 = x_6 + 80$
6. $F : x_6 + 100 = x_1$

Luego, planteamos el sistema reducido:

$$\begin{aligned} x_1 - x_6 &= 100 \\ x_2 - x_6 &= 0 \\ x_3 - x_6 &= 50 \\ x_4 - x_6 &= -70 \\ x_5 - x_6 &= 80 \end{aligned}$$

como $x_4 \geq 0$, $-70 + x_6 \geq 0$, entonces el mínimo valor para x_6 es 70.

8.2.3. Transformaciones lineales y matriz de representación

Grúa torre

En el mundo de la construcción de grandes edificaciones es común ver una grúa como la que se muestra en la imagen

Este tipo de grúa recibe el nombre de grúa torre. Se trata de una grúa de estructura metálica desmontable, especialmente diseñada para trasladar materiales de construcción de un punto a otro, mediante elevación y distribuirlos en un radio. Las grúas torre pueden ser fijas o móviles. Una grúa torre, de acuerdo a su diseño, puede realizar movimientos de rotación, que, por lo general se dan en la parte superior. También realiza movimientos de traslación sobre raíles en la base y sobre el carro de la grúa torre que está en la parte superior, que permite desplazar la carga a diferentes longitudes de la pluma. Por último, realiza un movimiento vertical para posicionar la carga a una altura determinada. Ver video: https://www.youtube.com/watch?v=N5AvYEZLPKs

En este mecanismo se usan las transformaciones lineales de rotación.

1 **[1pt]** Determine si las siguientes transformaciones son lineales:

- $T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} xcos(\theta) - ysen(\theta) \\ xsin(\theta) + ycos(\theta) \\ z \end{bmatrix}$, llamada transformación de rotación alrededor del eje Z

- $T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} zsin(\theta) + xcos(\theta) \\ y \\ -xsin(\theta) + zcos(\theta) \end{bmatrix}$, llamada transformación de rotación alrededor del eje Y

- $T_3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}a+x\\b+y\\c+z\end{bmatrix}$, llamada transformación de traslación en dirección de $\begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix}^t$

- $T_4\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix}$, llamada proyección sobre el plano xy

Rpta: Todas son transformaciones lineales excepto la mostrada en el tercer ítem.

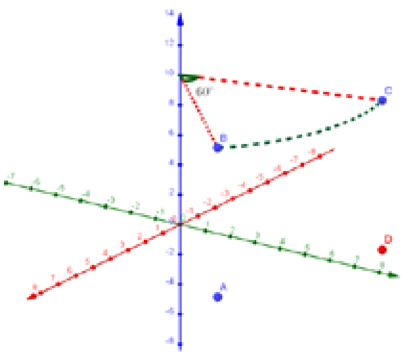
2 [**1pt**] Determine la representación matricial de las transformaciones lineales de la pregunta 1.
Tenemos:

a) Para $T_1 \to T_1\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\cos(\theta)-y\,\mathrm{sen}(\theta)\\x\,\mathrm{sen}(\theta)+y\cos(\theta)\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) & 0\\\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

b) Para $T_2 \to T_2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}z\,\mathrm{sen}(\theta)+x\cos(\theta)\\y\\-x\,\mathrm{sen}(\theta)+z\cos(\theta)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\theta) & 0 & \mathrm{sen}(\theta)\\0 & 1 & 0\\-\mathrm{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

c) Para $T_4 \to T_4\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

3 [**3pt**] La figura muestra el recorrido que debe realizarse para llevar una carga situada en el punto A hasta el punto D.



Mediante los siguientes pasos:

a) El punto $A = [5\ 5\ 0]^t$ se traslada verticalmente hacia arriba 10 unidades, situándose en el punto B.

b) Se realiza una rotación de un ángulo de 60° alrededor del eje Z, situándose en el punto C.

c) El punto C se proyecta al plano XY, situándose en el punto D.

Empleando las transformaciones lineales o no lineales, determine los puntos B, C y D

```
puntoA=[5 5 0]'
puntoB = puntoA + [0 0 10]'
r=deg2rad(60)
T1=[cos(r) -sin(r) 0;sin(r) cos(r) 0;0 0 1];
puntoC = T1*puntoB
%al aplicar proyeccion
T4=[1 0 0;0 1 0;0 0 0];
puntod=T4*puntoC
```

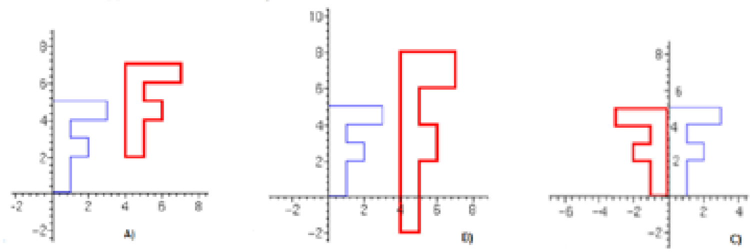
8.2.4. Núcleo e imagen de una TL

Transformaciones geométricas sobre imágenes digitales
Las transformaciones afines son ampliamente utilizadas en las aplicaciones móviles para el procesamiento de imágenes digitales en 2D, debido a su representación y manipulación matricial.
Una transformación afín es aquella en la que las coordenadas (x', y') del punto transformado se expresan linealmente en términos de las coordenadas (x, y) del punto original.
En otras palabras, la transformación está dada por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + m \\ y' &= cx + dy + n \end{aligned}$$

En su forma matricial: $F(X) = V + AX$. Donde: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$

1. [2P] Encuentre el vector V y la matriz A que describe cada una de las siguientes aplicaciones, sabiendo que la aplicación original es la que se ubica en el origen de coordenadas.



a) Para la primera figura:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

b) Para la segunda figura:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

c) Para la tercera figura:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2. [2P] Se define $T(x) = Ax$. Halle el $Ker(T)$ y la $Im(T)$ de cada una de las transformaciones obtenidas en el ítem anterior. Compara tu respuesta con lo obtenido en MatLab utilizando la función **null** y **colspace**.

```
A=[1 0;0 1]
null(A)
colspace(sym(A))
A=[1 0;0 2]
null(A)
colspace(sym(A))
A=[1 0;0 1]
null(A)
colspace(sym(A))
```

3. [1P] Complete el siguiente script en MatLab que grafique la figura c).

```
A=[0;0],B=[1;0],C=[1;2],D=[2;2],E=[2;3]
F=[1;3],G=[1;4],H=[3;4],I=[3;5],J=[0;5]
%Formando la letra F
```

```
P=[A B C D E F G H I J]
x1=P(1,:);y1=P(2,:)
plot(x1,y1)
%A: Matriz Asociada a la transformacion
A=          %Complete Aqui
%Transformando la letra F
PP=        %Complete Aqui
x2=         %Complete Aqui
y2=         %Complete Aqui
plot(x2,y2)
```

Observación: Escriba el código debajo del recuadro.

```
A=[0;0],B=[1;0],C=[1;2],D=[2;2],E=[2;3]
F=[1;3],G=[1;4],H=[3;4],I=[3;5],J=[0;5]
%grafica del eje Y
xy=[0 0];
yy=[10 -10];
plot(xy,yy,'k');
hold on
%grafica del eje X
xx=[-10 10];
yx=[0 0];
plot(xx,yx,'k')
%Formando la letra F
P=[A B C D E F G H I J]
x1=P(1,:);y1=P(2,:)
plot(x1,y1)
%A: Matriz asociada a la transformacion
A=  [-1 0;0 1]        %Complete Aqui
%Transformando la letra F
PP= [-1 0;0 1]       %Complete Aqui
solu=PP*P
x2= solu(1,:)        %Complete Aqui
y2= solu(2,:)        %Complete Aqui
plot(x2,y2,'r')
hold off
```

8.2.5. Valores propios

Las cadenas de Markov son modelos matemáticos aplicables a diversos campos como biología, negocios, química, ingeniería, física y otros. En cada aplicación, estos modelos se emplean para describir experimentos o mediciones que se realizan de manera repetitiva y siguiendo el mismo procedimiento. En cada repetición del experimento, el resultado obtenido será uno de los posibles resultados predefinidos, y este resultado dependerá únicamente del resultado obtenido en la repetición inmediatamente anterior, es decir, siendo x la variable que describe el estado y dado x_0,entonces x_1, x_2, x_3 son los estados siguientes (en sentido consecutivo):

$$x_{k+1} = f(x_k) \qquad k = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

Para la aplicación en particular que trataremos en el TAP, f es una aplicación lineal, es decir:

$$x_{k+1} = f(x_k) = Ax_k \qquad k = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

Suponga que se estudia la migración o permanencia de los votantes respecto de tres partidos políticos P, Q y R, entonces:

$$x = \begin{bmatrix} \text{\% de votación obtenido por } P \\ \text{\% de votación obtenido por } Q \\ \text{\% de votación obtenido por } R \end{bmatrix}$$

Supongamos, asimismo, que la votación se reliza cada dos años y que la siguiente matriz denota la migración o permanencia de los votantes desde P, Q y R hacia P, Q y R

$$A = \begin{array}{ccccc} \text{desde} & P & Q & R & hacia \\ & 0.70 & 0.10 & 0.30 & P \\ & 0.20 & 0.80 & 0.30 & Q \\ & 0.10 & 0.10 & 0.40 & R \end{array}$$

La primera columna de A (este tipo de matriz se llama estocástica, pues la suma de sus columnas es igual a 1) se interpreta de la siguiente manera: de una elección a otra, del 100 % de votantes por el partido político P, el 70 % se mantiene en P, el 20 % migró hacia Q y el 10 % migró hacia R; de modo similar las otras columnas de la matriz A. Suponiendo que la matriz de permanencias y migraciones se mantiene durante un largo tiempo y considerando una primera elección en la cual se tienen los siguientes resultados para los tres partidos políticos A, B y C, respectivamente

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0.55 \\ 0.40 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

Preguntas:

1. Halle los porcentajes obtenidos en la quinta votación x_4 (es decir, después de 8 años)

```
%estado inicial
x0=[0.55;0.40;0.05];
%matriz de transicion
A=[0.7 0.1 0.3;0.2 0.8 0.30;0.1 0.1 0.4]
x4=(A^4)*x0
%porcentajes obtenidos en la 5 votacion
porcentajes=x4*100
```

.

2 Halle los valores y vectores propios de la matriz A. Sean λ_1, λ_2 y λ_3 los valores propios y v_1, v_2 y v_3 los respectivos valores propios, indique las multiplicidades algebraica y geométrica de los valores propios.

```
A=[0.7 0.1 0.3;0.2 0.8 0.30;0.1 0.1 0.4]
[R D]=eig(A)
%en la diagonal D se encuentran los VP de A
```

En la tabla se muestran las multiplicidades:

Valores propios de A	1	0.6	0.3
Multplicidad algebraica	1	1	1
Multiplicidad geométrica	1	1	1

3. Demuestre que los vectores propios de A constituyen una base para $\mathbb{R}^3$ y luego de ello justifique la existencia de constantes reales c_1 , c_2 y c_3 tales que: $x_0 = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$

```
A=[0.7 0.1 0.3;0.2 0.8 0.3;0.1 0.1 0.4]
[R D]=eig(A)
rref(R)
linsolve(R,[0;0;0])
%se verifica que los vp son linealmente independientes
```

4. Utilizando las definiciones de valor y vector propio, además de la cadena de Markov ($x_{k+1} = Ax_k$), deduzca la relación

$$x_k = c_1\lambda_1^k v_1 + c_2\lambda_2^k v_2 + c_3\lambda_3^k v_3$$

Tenemos:

$$x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$

multiplicando por A, tenemos:

$$Ax_0 = Ac_1 v_1 + Ac_2 v_2 + Ac_3 v_3$$

pero $Av_i = \lambda_i v_i$, formándose:

$$x_1 = C_1\lambda_1 v_1 + C_2\lambda_2 v_2 + C_3\lambda_3 v_3$$

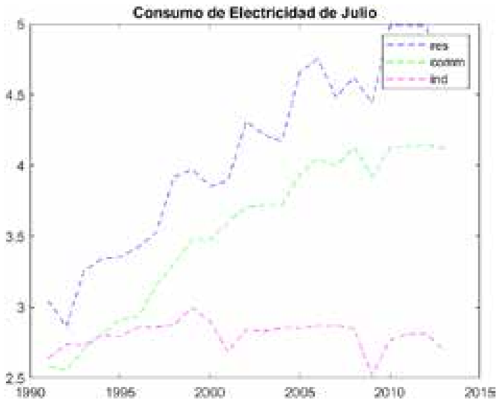
multiplicando sucesivamente por A, llegamos a:

$$x_k = c_1\lambda_1^k v_1 + c_2\lambda_2^k v_2 + c_3\lambda_3^k v_3$$

8.3. TAP1 2022-2

8.3.1. Introducción a MatLab y matrices: Caso A

El consumo de electricidad para los sectores económicos residencial, comercial e industrial está guardado en el siguiente archivo: electricidad.mat (lo puede ubicar en MathWorks). Dicha información se puede representar en el siguiente gráfico:



Los datos de consumo representan el consumo eléctrico de EE.UU. para diferentes años en el mes de julio. Los datos de consumo están en 10^9 kWh/día y los datos de precios están en centavos de dólar por kWh.

Preguntas

1. (1P) Cargue el archivo **electricidad.mat** y asigne los datos de consumo a la variable C, así como también los datos de precio a la variable P. Los datos del consumo residencial se almacenan en la primera columna. Cree una variable res que contenga la primera columna de C. Los datos de los consumos comerciales y los datos de los consumos industriales se almacenan en la segunda y tercera columna, respectivamente. Cree las variables $comm$ e ind, que contendrán la segunda y tercera columna de C.

```
load('electricidad.mat')
C = consumo
P = precio
res = C(:,1)
comm = C(:,2)
ind = C(:,3)
```

2. (1P) Los datos de los precios del consumo de electricidad del sector económico **residencial** se encuentran en la primera columna de la matriz P. Cree una variable $PrecioRes$ que almacene los datos de la primera columna de P. Encuentre el precio promedio que se paga por el consumo para dicho sector y almacene en la variable $maxprecio$.

```
PrecioRes = P(:,1)
maxprecio = mean(PrecioRes)
```

3. (1P) Extraiga una submatriz M de la matriz C para aquellos datos cuyo consumo para el sector económico **residencial** sea menor a 4.5×10^9 kWh/día, el consumo para el sector económico **comercial** esté entre 3×10^9 kWh/día y 4×10^9 kWh/día y el consumo para el sector económico **industrial** sea menor a 3×10^9 kWh/día. Sugerencia: utilice el comando **find** de MatLab.

```
unores = find(res < 4.5);
doscomm = find(3 < comm & comm < 4);
tresind = find(ind < 3);
M = [res(unores); comm(doscomm); ind(tresind)]
```

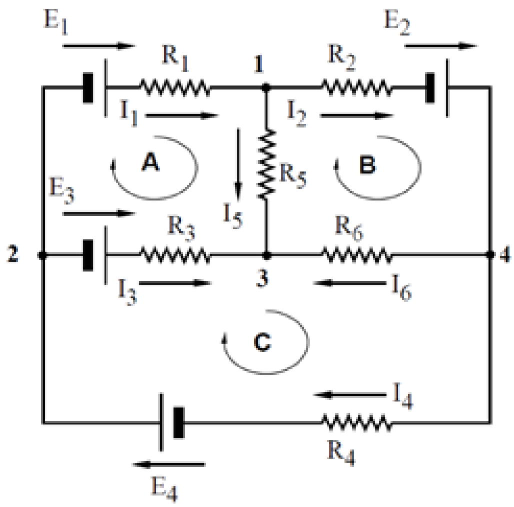
4. (1P) Cree un vector llamado yrs que represente los años desde 1991 hasta 2013. Grafique yrs vs res, yrs vs $comm$ y yrs vs ind en un solo gráfico con sus respectivas etiquetas y leyendas.

```
yrs = (1991:1:2013);
hold on
plot(yrs, res)
plot(yrs, comm)
plot(yrs, ind)
xlabel("Consumo")
ylabel("Years")
title("Consumo de electricidad de Julio")
legend("Residencial", "Comercial", "Industrial")
legend("Position",[0.75412,0.3463,0.21657,0.12703])
hold off
```

8.3.2. Operaciones elementales, rango y determinantes: Caso B

Los circuitos eléctricos son una aplicación dentro de la ingeniería eléctrica; al modelarlos dan lugar a un sistema de ecuaciones rectangular. En un circuito de corriente continua que contiene resistencias y baterías denotadas (EMF):

Nodo. Es un punto en el que se unen tres o más conductores.
Bucle. Es una trayectoria de conducción cerrada.
Rama. Es cualquier parte de un circuito entre dos nodos contiguos.
Observación: el circuito que se muestra contiene cuatro nodos, siete bucles y seis ramas:



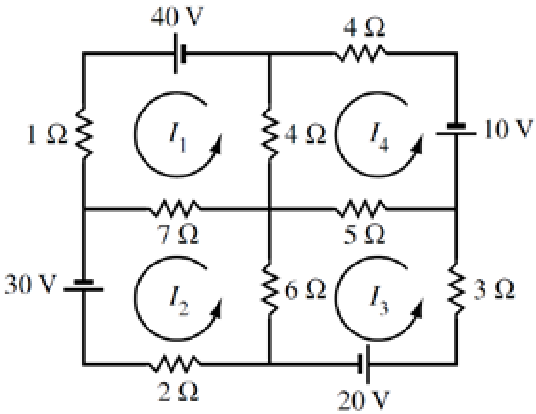
- Ley de OHM.
  Establece que para una corriente de I amperios, la caída de voltaje V (en voltios) a través de una resistencia de R ohmios está dada por $V = IR$.

- Ley de Kirchhoff - Regla de los nodos. La suma algebraica de corrientes hacia cada nodo es cero. Es decir, la corriente entrante total debe ser igual a la corriente saliente total.

- Regla de los bucles. La suma algebraica de los EMF alrededor de cada bucle debe ser igual a la suma algebraica de los productos IR en el mismo bucle.

Dado el siguiente circuito, se establece el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
12I_1 - 7I_2 - 4I_4 &= 40\\
-7I_1 + 15I_2 - 6I_3 &= 30\\
-6I_2 + 14I_3 - 5I_4 &= 20\\
-4I_1 - 5I_3 + 13I_4 &= -10
\end{aligned}$$



Ejercicios

1. [1P] Establezca un sistema de ecuaciones matricial de la forma $Ax = b$.

```
A = [12 -7 0 -4; -7 15 -6 0; 0 -6 14 -5; -4 0 -5 13]
b = [40; 30; 20; -10]
```

2. [1P] Forme la matriz C obtenida por la concatenación de A y b, esto es $C = [A \quad b]$.

```
C = [A b]
```

3. [1P] Usando la definición, determine el rango de la matriz A y de la matriz C. Compare su resultado con el comando **rref** de MatLab.

```
A_REDUCIDA = rref(A)
rangoA = rank(A)
C_REDUCIDA = rref(C)
rangoC = rank(C)
```

4. [1P] Usando propiedades, calcule el determinante de la matriz A. Compare su resultado con el comando **det** de MatLab.

Usando propiedades, tenemos la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -7 & 0 & -4 \\ -7 & 15 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 14 & -5 \\ -4 & 0 & -5 & 13 \end{bmatrix}$$

Usando menores y cofactores:

$$\det(A) = 12 \begin{vmatrix} 15 & -6 & 0 \\ -6 & 14 & -5 \\ 0 & -5 & 13 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} -7 & -6 & 0 \\ 0 & 14 & -5 \\ -4 & -5 & 13 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -7 & 15 & 6 \\ 0 & -6 & 14 \\ -4 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 12 \times 1887 + 7 \times -1219 + 4 \times -1194 = 10487$$

```
DeterminanteA = det(A)
```

8.3.3. Consistencia, espacio nulo y condicionamiento: Caso C

Un maestro de dulces tiene 76 kg de harina, 14.5 kg de azúcar y 16.5 kg de mantequilla para fabricar 3 tipos de pasteles este fin de semana. El maestro necesita 3.2 kg de harina, 1.1 kg de azúcar y 1.2 kg de mantequilla para hacer una decena de pasteles del tipo A. Para una decena de pasteles del tipo B, necesita 6.5 kg de harina, 0.5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Finalmente, para elaborar los pasteles de tipo C, necesita 7 kg de harina, 2 kg y 1.5 kg de mantequilla. El maestro va a usar todos sus insumos para la preparación de los pasteles el fin de semana.

Ejercicios

1. [1P] Formule un sistema de ecuaciones lineales de 3 incógnitas y 3 ecuaciones en forma algebraica y matricial, diseñado para que su solución del mismo permita hallar el número de decenas de pasteles que el maestro dulcero va a preparar el fin de semana. Recuerde que va a utilizar todos sus insumos. Defina adecuadamente las variables.
   Solución:

   - Sea x el número de decenas de pasteles del tipo A.
   - Sea y el número de decenas de pasteles del tipo B.
   - Sea z el número de decenas de pasteles del tipo C.

El pastelero cuenta en total con: 76 kg de harina, $14,5$ kh de azúcar y 16.5 kg de mantequilla. Expresando en las formas solicitadas:

$$3.2x + 6.5y + 7z = 76$$
$$1.1x + 0.5y + 2z = 14.5$$
$$1.2x + 1y + 1.5z = 16.5$$

De forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 3.2 & 6.5 & 7 \\ 1.1 & 0.5 & 2 \\ 1.2 & 1 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 76 \\ 14.5 \\ 16.5 \end{bmatrix}$$

2. [1P] Determine si el sistema de ecuaciones generado en el apartado 1 es compatible o incompatible con ayuda del teorema de Rouché-Frobenius y luego halle la solución del sistema planteado utilizando alguno de los comandos de Matlab estudiados en clase. Interprete la solución obtenida de acuerdo al contexto presentado. Redacte una respuesta coherente.

```
[m,n]=size(Insumos);
Aa=[Insumos Ins_Totales];
RangA=rank(Insumos);
RangAa=rank(Aa);
if (RangAa ~= RangA)
    fprintf('El sistema no tiene solucion \n')
elseif (RangA==n)
    fprintf('El sistema tiene solucion unica \n')
else
    fprintf('El sistema tiene infinitas soluciones\m')
end

Decenas_de_Pasteles = linsolve(Insumos, Ins_Totales)
%Interpretacion: el fin de semana, utilizando todos sus ...
    insumos, el dulcero preparara exactamente 5 decenas del ...
    pastel A, 6 decenas del pastel B, y 3 decenas del pastel C.
```

3. [1P] Supongamos que el maestro dulcero decide usar 100 g más de harina en la preparación de los pasteles, manteniendo los demás insumos iguales, ¿Cuántas decenas de pasteles elaboraría ahora con este cambio?, ¿la nueva combinación de pasteles difiere mucho a la que se iba a lograr con los insumos originales? ¿A qué se debe esto? (indicación: justifique usando el condicionamiento de la matriz de coeficientes asociada al sistema de ecuaciones).

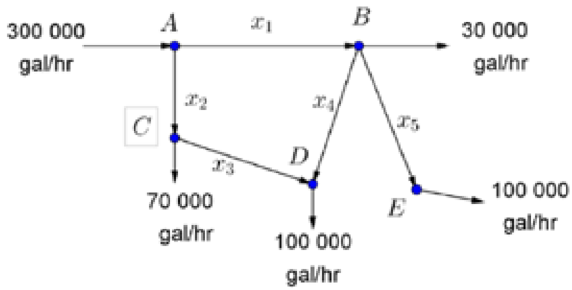
```
Ins_Totales_cambio = [76.1; 14.5; 16.5];
Decenas_de_Pasteles_cambio = ...
    linsolve(Insumos,Ins_Totales_cambio)
Condicionamiento = cond(Insumos)
```

4. [1P] Verifique si una combinación de pasteles de 2, 3 y 4 decenas del tipo A, B y C, respectivamente, pertenecen o no al espacio nulo de la matriz de coeficientes del sistema planteado en el apartado 1. ¿Consideraría que alguna combinación de decenas de pasteles del tipo A, B y C está en el espacio nulo de la matriz de coeficientes asociada al sistema? Justifique.

```
Combinacion_nueva = [2; 3; 4]
Verificacion = Insumos * Combinacion_nueva
```

8.3.4. SEL Eliminación gaussiana: Caso D

Un sistema de riego tecnificado en la costa peruana permite que el agua fluya según el patrón que se muestra en la figura



El agua fluye hacia el sistema en A y sale del sistema en B, C , D y E con las cantidades indicadas en la figura. Sobre la base del hecho de que en cada punto la cantidad de agua que entra es igual a la que sale:

Ejercicios

1. (1P) Formule un sistema de ecuaciones lineales (formas algebraica y matricial) en la variables indicadas en la figura cuya solución permita hallar las cantidades de agua que fluyen por cada segmento por hora.

Solución:

a) En forma algebraica:

$$\begin{aligned}
1x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 300000\\
1x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 1x_4 - 1x_5 &= 30000\\
0x_1 + 1x_2 - 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 70000\\
0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 0x_5 &= 100000\\
0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 &= 100000
\end{aligned}$$

b) En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300000\\ 30000\\ 70000\\ 100000\\ 100000 \end{bmatrix}$$

2. (1P) Analice la consistencia del sistema planteado, utilizando el teorema de Rouché-Frobenius.

```
[m,n]=size(G);
Aa=[G q];
RangA=rank(G);
RangAa=rank(Aa);
if (RangAa ~= RangA)
    fprintf('El sistema no tiene solucion \n')
elseif (RangA==n)
    fprintf('El sistema tiene solucion unica \n')
else
    fprintf('El sistema tiene infinitas soluciones\n')
end
```

3. (2P) En caso de que el sistema resulte ser compatible determinado, resuelva el sistema mediante el proceso de eliminación gaussiana, pero si el sistema es compatible indeterminado, luego de aplicar el proceso de eliminacion gaussiana, exprese la solución en términos de uno o más parámetros. En este último caso determine la solución que considera la condición adicional $x_3 = x_4$.

```
    %Aumentando nueva condicion

G = [1 0 0 -1 -1; 1 1 0 0 0; 0 0 1 1 0; 0 1 -1 0 0; 0 0 1 ...
    -1 0; 0 0 0 0 1;]
```

```
q = [30000; 300000; 100000; 70000; 0; 100000]

[m,n]=size(G);
Aa=[G q];
for k=1:n-1
    [maxi,pos]=max(abs(Aa(k:n,k)));
    Aa([k+pos-1 k],:)= Aa([k k+pos-1],:);
    pivo=Aa(k,k);
    for j=k+1:m
        mjk=Aa(j,k)/pivo;
        Aa(j,:)=Aa(j,:)-mjk*Aa(k,:);
    end
end
Ea=Aa(:,1:n);
nb=Aa(:,n+1);

[n,n]=size(Ea);
x=zeros(n,1);
for k=n:-1:1
   x(k)=(nb(k)-sum(Ea(k,k+1:n)*x(k+1:n)))/Ea(k,k);
end

format rat
Resultado = x

% x1 = 180000
% x2 = 120000
% x3 = 50000
% x4 = 50000
% x5 = 100000
```

8.3.5. Factorización LU, QR: Caso E

Considere el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, donde A es la matriz de 6×6:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 \\ 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 \end{bmatrix}$$

y $b = [21, 91, 266, 630, 1302, 2442]^T$. La matriz A es conocida como matriz de Pascal (en MatLab puede generar la matriz de Pascal con el comando **pascal(6)**).

Ejercicios:

1. (1.5 ptos) Resuelva el problema planteado usando la factorización QR de A mediante el método de Gram-Schmidt (GS).

```
    format long
A = pascal(6)
b = [21; 91; 266; 630; 1302; 2442]

[m, n] = size(A);
R = zeros(n, n);
V = A;
Q=zeros(m, n);
for i =1:n
    R(i,i)= norm(V(:,i));
    Q(:,i)= V(:,i)/R(i,i);
    for j=i+1:n
        R(i,j)= (Q(:,i)')*V(:,j);
        V(:,j)=V(:,j) - R(i,j)*Q(:,i);
    end
end

c =  Q' * b;

[n,n]=size(R);
x=zeros(n,1);
for k=n:-1:1
   x(k)=(c(k)-sum(R(k,k+1:n)*x(k+1:n)))/R(k,k);
end

Solucion = x
```

2. (0.5 ptos) Para una investigación muy importante, se requiere obtener una aproximación al sistema con al menos 6 cifras significativas con respecto a la solución exacta del problema. ¿Cuántas cifras significativas tiene su aproximación si la solución exacta es $x = [1, 2, 3, 4, 5, 6]^T$?

```
mSol = norm(Solucion);
mx = norm ([1, 2, 3, 4, 5, 6]');

aprox = (abs(mSol-mx)/abs(mSol));

aprox ≤ 5*10^-10
aprox ≤ 5*10^-11    %Verdad con el mayor valor de t = 11
aprox ≤ 5*10^-12
```

3. (1.5 ptos) Los investigadores han resuelto utilizar el algoritmo de LU en su forma de Crout. Resuelva el problema planteado usando dicho método.

```
format long
[m, n] = size(A);
L1 = A;
U1 = eye(m, n);
j = 1;
for y=1 : (m-1)
    for x=j: (n-1)
    multi = L1(y, x+1)/L1(y, y);
    L1(:, x+1) = L1(:, x+1) - multi*L1(:, y);
    U1(y, x+1) = multi;
    end
j = j+1;
end

y = linsolve(L1,b);
r = linsolve(U1,y);

Respuesta = r
```

4. (0.5 ptos) ¿Cuántas cifras significativas tiene su nueva aproximación con respecto al exacto? ¿Lograron su cometido?

```
    mResp = norm(Respuesta);
mx = norm ([1, 2, 3, 4, 5, 6]');

aprox = (abs(mResp-mx)/abs(mResp))
%t = 15 (cifras significativas), de acuerdo a la condicion ...
    si lograron su objetivo
```

9. Test de entrada

9.1. TE 1A

1. Sea la siguiente matriz P de orden $m \times n$:

   $$\begin{bmatrix} 1 & m & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & n \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

   Se crea una matriz cuadrada Q con las filas 1, 3 y 4 de P, manteniendo el orden original de las mismas.

   Determine el valor de $q_{12} + q_{23} + q_{32}$ de la matriz Q opuesta.
   Rpta: -8.

2. Se tienen dos matrices A y B, donde A es una matriz triangular superior de la forma:

   $$\begin{bmatrix} 2 & y & n \\ 2n - m & 1 & m \\ y - m & m - n + 1 & -1 \end{bmatrix}$$

   y B es el triple de una matriz identidad.

   Determine $(2A + B)^t$ y dé como respuesta la suma de valores de su diagonal principal.
   Rpta: 13.

3. Determine el valor verdadero (V) o falso (F) de las siguientes tres proposiciones:

   a) Si A es una matriz de orden mxn, entonces $B{=}A^t + A$ es una matriz simétrica.

b) Si A es una matriz de orden nxm, donde $m > n$, entonces es posible la operación $[A_{mxn}]x[A_{nxm}]$.

c) Si A es una matriz de orden mxn, entonces $A^t{=}Anxm$

Rpta: VVV

4. Se tiene una matriz triangular inferior L cuya diagonal presenta valores no nulos. Entonces, L es invertible y su inversa es una matriz triangular inferior. Rpta: V.

9.2. TE 1B

1. Halle la inversa de la siguiente matriz A cuadrada $m \times n$ simétrica:

   $A = \begin{bmatrix} 2 & m \\ x & 1 \end{bmatrix}$

   Dé como respuesta la suma de todos los valores de $14A^{-1}$.
   Rpta: 5.

2. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, determine la traza de la matriz

$$A^{20} + A^{30} + A^{40}$$

   Rpta: 9.

3. Dadas las siguientes proposiciones, determine el valor de verdad (V/F).

   a) Si la matriz A es de orden $m \times n$ y $A(BA)$, esta correctamente definida. Entonces la matriz B será de dimensión $n \times m$.

   b) Sean A y B matrices cuadradas del mismo tamaño. ¿Es $(AB)^2 = A^2B^2$ una identidad matricial válida?

   c) Si la matriz A tiene un renglón de ceros y B es cualquier matriz para la que AB está definida, entonces AB también tiene un renglón de ceros.

   Rpta: VFF.

4. Dadas las siguientes proposiciones, determine el valor de verdad (V/F).

   a) Si el rango de la matriz asociada a un sistema de ecuaciones lineales es igual al rango de la matriz aumentada del mismo sistema, entonces podemos asegurar que el sistema de ecuaciones tiene solución única.

   b) Toda matriz cuadrada posee inversa.

   c) Existen sistemas de ecuaciones de la forma $A_{nxn}X_{nx1} = 0$ que son compatibles indeterminados.

   Rpta: FFV.

9.3. TE 2A

1. Al factorizar una matriz cuadrada de orden $m \times 3$ por el método de Crout se obtienen las matrices L (triangular inferior) y U (triangular superior), donde:
   $\begin{cases} x + y = u_{33} \\ x - y = u_{21} + l_{12} \end{cases}$
   Determine:xy
   Rpta: 1/4.

2. Factorice la siguiente matriz por el método de Doolittle. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 5 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

   Dé como respuesta la traza de la matriz U.
   Rpta: -1.

3. Sea A una matriz de orden 20×20, que ha sido factorizada en la forma $L \times U$, forma de Crout siendo L triangular inferior y U triangular superior. Halle la traza de U.
   Rpta:20

4. Responda verdadero (V) o falso (F):
   Luego de modelar un sistema de ecuaciones $Ax = b$, se aplica la primera fase del proceso de eliminación hacia adelante, que nos ha permitido obtener un sistema reducido equivalente al sistema inicial. Para terminar la resolución del sistema tenemos una segunda fase, llamada sustitución hacia atrás o regresiva, que consiste en hallar el valor de la incógnita de la última ecuación, sustituirla en la ecuación anterior calculando el valor de la otra incógnita, y

así sucesivamente.
Rpta: V.

9.4. TE 2B

1. Al factorizar una matriz cuadrada de orden $m \times 3$ por el método de Crout se obtienen las matrices L (triangular inferior) y U (triangular superior) donde:
   $\begin{cases} x + y = u_{33} \\ x - y = u_{21} + l_{12} \end{cases}$ Determine:xy
   Rpta: 1/4.

2. Factorizar la siguiente matriz por el método de Doolittle. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 5 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$
   Dé como respuesta la traza de la matriz U.
   Rpta: -1.

3. Sea A una matriz de orden 20×20, que ha sido factorizada en la forma $L \times U$, forma de Crout, siendo L triangular inferior y U triangular superior. Halle la traza de U.
   Rpta: 20.

4. Responda verdadero (V) o falso (F):
   Luego de modelar un sistema de ecuaciones $A.x = b$ se aplica la primera fase del proceso de eliminación hacia adelante, que nos ha permitido obtener un sistema reducido equivalente al sistema inicial. Para terminar la resolución del sistema tenemos una segunda fase, llamada sustitución hacia atrás o regresiva, que consiste en hallar el valor de la incógnita de la última ecuación, sustituirla en la ecuación anterior calculando el valor de la otra incógnita, y así sucesivamente.
   Rpta: V.

9.5. TE 3A

1. Si se conocen las bases canónicas de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

   a) $T(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 5)$
   b) $T(0, 1, 0, 0) = (2, -3, 8)$

c) $T(0,0,1,0) = (-3,5,-15)$

d) $T(0,0,0,1) = (1,-2,-3)$

Determine T(1,1,1,1)
Rpta: $(1,1,-5)$.

2. Sea una función $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde:
$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix}$ ¿Será transformación lineal?.
Rpta: No es una transformación lineal.

3. Sea $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, determine si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F):

   a) Si T es una transformación lineal, entonces $T(u+v) = T(u)+T(v), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m$.

   b) Si T es una transformación lineal, entonces $T(7x) = 4T(7x/4), \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$.

   c) Si A es una matriz de $(n) \times (n+1)$, entonces $T(x) = Ax$ es una transformación lineal de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

   d) Si T es una transformación lineal, entonces $T(ax/by) = T(ax)/T(by), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m$.

   Rpta: VVFF.

4. Sea T una transformación lineal de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde:

$$T\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}; T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix}; T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Halle la suma de valores de la matriz:
$T\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$
Rpta: 48.

9.6. TE 3B

1. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F):

   a) Si T es una transformación lineal, entonces $T(x+y) = T(x) + T(y)$.

   b) Si T es una transformación lineal, entonces $T(ax) = aT(x)$.

   c) Si T es una transformación lineal, entonces $T\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{T(x)}{T(y)}$.

   d) Si A es una matriz de 15×14, entonces $T(x) = Ax$ es una transformación lineal de $\mathbb{R}^{14} \to \mathbb{R}^{15}$.

   Dé como respuesta la cantidad de afirmaciones incorrectas.
   Rpta: una.

2. La función $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$T(-x, y, z) = (0, -x+y, y+2z)$$

   es una transformación lineal.
   Rpta: Sí es una transformación lineal.

3. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal y supóngase que $T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$; $T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$. Halle la suma de los términos de la matriz:
   Rpta: 2.

4. Responda verdadero (V) o falso (F), según corresponda, a las siguientes afirmaciones:

   a) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida mediante $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x+2y \\ x \end{bmatrix}$, entonces su matriz asociada es $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

   b) La transformación $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida mediante $T(11x) = -33x$ es una transformación lineal.

   Rpta: VV.

9.7. TE 4A

1. Determine la dimensión del núcleo en la siguiente transformación lineal:
   $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2; g(x,y)=(x+2y,2y+4x)$
   Rpta: 1.

2. Siendo L en $\mathbb{R}^2$ una recta definida que pasa a través del origen, la matriz A en $\mathbb{R}^2$ representa la rotación horario en 90 grados de L. Determine la dimensión de la imagen de la matriz A.
   Rpta: 2.

3. Una máquina realiza movimientos precisos mediante una transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$,donde su posición en un espacio de 3D $\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ se mueve a otra posición $\begin{bmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{bmatrix}$, es decir $T\left(\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{bmatrix}$, donde T es la transformación del movimiento, la posición $x'=\dfrac{5x+y+7z}{2}$, el desplazamiento horizontal $y'=x+2y+3z$; y el desplazamiento vertical $z'=2x+\dfrac{y}{7}-\dfrac{z}{2}$. Determine la traza de la matriz asociada a la transformación T.
   Rpta: 4

4. Se requiere ampliar un triángulo de vértices $(1,0)$; $(2,0)$ y $(3,2)$ representado en un plano XY mediante una transformación lineal $T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$, obteniéndose como nuevas coordenadas $(2,0)$; $(4,0)$ y $(6,4)$. Determine la suma de todos los valores de la matriz asociada a la transformación lineal T.
   Rpta: 4.

9.8. TE 4B

1. Encuentre la dimesión de la imagen de T: $T(x,y)=(x-y+z,x+y-z,2x)$.
   Rpta: 2.

2. Sea $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ la transformación lineal proyección en el plano xz con $T(x,y,z)=(x,x+y,y)$. Determine la dimensión del núcleo de la transformación T.
   Rpta: 1.

3. Una máquina realiza movimientos precisos mediante una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donde su posición en un espacio de 3D $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ se mueve a otra posición $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$, es decir $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$, donde T es la transformación del movimiento, la posición $x' = 2x + 2y + z$, el desplazamiento horizontal $y' = \frac{-2x+y}{3}$ y el desplazamiento vertical $z' = x - \frac{y}{3} - \frac{z}{3}$. Determine la traza de la matriz asociada a la transformación T.
   Rpta: 2.

4. Se requiere ampliar un triángulo de vértices $(1, 0)$;$(2, 0)$ y $(3, 2)$ representado en un plano XY mediante una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, obteniéndose como nuevas coordenadas (7,0); (14,0) y (21,10). Determine la suma de todos los valores de la matriz asociada a la transformación lineal T.
   Rpta: 12.

9.9. TE 5A

1. El menor valor propio de la matriz $\begin{bmatrix} -1 & 22134 & 3500 \\ 0 & -2 & 345 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ es:

   Rpta: -2.

2. El polinomio característico asociado a la matriz $\begin{bmatrix} 1-i & i \\ i & 1+i \end{bmatrix}$ es:

   i: unidad imaginaria
   Rpta: $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 3$.

3. El vector

$$\mathsf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

   es un vector propio de la matriz

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ \frac{16}{5} & 1 & \frac{18}{5} \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Determine el valor propio al cual está asociado.
Rpta:-1.

4. Aplique el método de la potencia a la matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ con $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ para hallar su valor propio dominante con 2 iteraciones.
Rpta: 8.

9.10. TE 5B

1. Se tiene la siguiente matriz A.
$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$
Verifique cuáles de los siguientes vectores, V_1, V_2 o V_3, son vectores propios de A.
$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $V_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$
Rpta: Solo V_1.

2. El polinomio característico asociado a la matriz $\begin{bmatrix} 1 & -tan(x) \\ cot(x) & -1 \end{bmatrix}$
Recuerde que: $cot(x) = 1/tan(x)$.
Rpta: $p(\lambda) = \lambda^2$.

3. Sea A una matriz de 3×3. Dado que 2 es un valor propio de A, encuentre la suma de las inversas de los otros dos valores propios de A. Si se sabe que traza$(A) = 4$ y det$(A) = -6$.
Rpta: -2/3.

4. Aplique el método de la potencia a la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ con $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ para hallar su valor propio dominante con 2 iteraciones.
Rpta: 3.

10. Laboratorio MatLab

10.1. Laboratorio L1 2022-1

1. Cree la siguiente matriz A :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 18 & 16 & 14 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Cree una matriz B de 3×4 a partir de la primera, tercera y cuarta fila, y de la primera, tercera, quinta y séptima columna de A. Halle el determinante de $B\times B^T$ (i.e det $\left(BB^T\right)$).

```
v1= 1:1:10;
v2= 2:2:20;
v3= 10:-1:1;
v4=20:-2:2;
A=[v1;v2;v3;v4];
B=A([1 3 4],[1 3 5 7])
det(B*B')
% Rpta: d) 0
```

2. Cree las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 7 & -3 \\ 6 & -10 & 0 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 15 & 6 & 12 \\ 33 & 33 & 15 \\ -15 & -63 & -15 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 11 & 11 & 5 \\ -5 & -21 & -5 \end{bmatrix}$$

Determine el valor de verdad (V/F) de las siguientes proposiciones:

a) Para la matriz A, multiplique la primera fila por 2 y súmelo a la segunda fila, a la matriz resultante, reste a la tercera fila la segunda fila. La matriz resultante es igual a la matriz C.

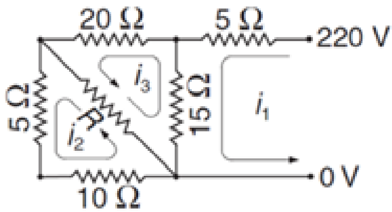
b) Se cumple $B = A + 2C$.

c) El rango de A es diferente al rango de C.

Seleccione la respuesta correcta.

```
A=[5 2 4; 1 7 -3; 6 -10 0];
B=[15 6 12; 33 33 15; -15 -63 -15];
C=[5 2 4;11 11 5; -5 -21 -5];

% Item i
A1=A;
A1(2,:)=A1(2,:)+2*A1(1,:);
A1(3,:)=A1(3,:)-A1(2,:);
C == A1

% Item ii
B == (A + 2*C)

% Item iii
rank(A) ~= rank(C)

% Rpta: b) VFF
```

3. La red eléctrica que se muestra a continuación consta de tres bucles. Aplicando la ley de Kirchoff ($\sum$ caídas de voltaje$=\sum$ fuentes de voltaje) para cada lazo, produce las siguientes ecuaciones de las corrientes de lazo i_1, i_2 e i_3:



El sistema de ecuaciones que da los valores de las corrientes i_1, i_2, i_3 es dado por

$$
\begin{aligned}
5i_1 + 20i_3 + 5i_2 + 10i_2 &= 220 \\
5i_1 + 15(i_1 - i_3) &= 220 \\
R(i_2 - i_3) + 5i_2 + 10i_2 &= 0 \\
20i_3 + R(i_3 - i_2) + 15(i_3 - i_1) &= 0
\end{aligned}
\qquad \ldots (1)
$$

Considere $R = 5\ \Omega$. Forme el sistema de ecuaciones en la forma $Ax = b$, donde A es la matriz de coeficientes, b el vector de constantes y $x = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$ es el vector de incógnitas, luego responda las preguntas.

1.(3P) (verdadero o falso) Según el teorema de Rouché-Frobenius, se puede afirmar que el sistema tiene una única solución.

```
A=[5 15 20;20 0 -15; 0 20 -5; -15 -5 40];
b=[220 220 0 0]';
C=[A b];
rank(C) == rank(A)
% Rpta: 1) V
```

2. (3P) Dada la siguiente matriz

```
B=[20 0 -15;0 20 -5]
```

Complete el siguiente párrafo:

El vector $v = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$ ....(pertenece/no pertenece)n al espacio nulo de la matriz B y $w = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$ ....(pertenece/no pertenece) al espacio nulo de la matriz B.

```
B=[20 0 -15;0 20 -5];
v=[3/4 1/4 1]';
w=[1 1/2 2]';
B*v==0  % pertenece
B*w==0  % no pertenece
```

3.(4P) Consideremos ahora el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 5i_1 + 15\,(i_1 - i_3) &= 220 \\ R\,(i_2 - i_3) + 5i_2 + 10i_2 &= 0 \qquad \ldots (2) \\ 20i_3 + R\,(i_3 - i_2) + 15\,(i_3 - i_1) &= 0 \end{aligned}$$

expresado en su forma matricial $Mx = d$. Se desea resolver el sistema $Mx = d$ por factorización de Crout $M = LU$, donde debemos resolver 2 sistemas triangulares:
$Lz = d$ y $Ux = z$. Determine la suma de todos los elementos del vector columna z:

```
M=[20 0 -15;0 20 -5; -15 -5 40];
d=[220;0;0];
[L,U]=crout(M)
z=sustidir(L,d)
s=sum(z)
% Rpta: 17
```

4.(4P) Del sistema de ecuaciones (2), $Mx = d$, se desea factorizar la matriz M utilizando la factorización QR de Gram-Schmidt. Determine la traza de la matriz Q.

```
M=[20 0 -15;0 20 -5; -15 -5 40];
a1=M(:,1);
u1=a1;
q1=u1/norm(u1);
a2=M(:,2);
u2=a2-dot(a2,q1)*q1;
q2=u2/norm(u2);
a3=M(:,3);
u3=a3-dot(a3,q1)*q1-dot(a3,q2)*q2;
q3=u3/norm(u3);
Q=[q1 q2 q3]
r=trace(Q)
% Rpta: 2.5650
```

Funciones utilizadas en clase:

```
function[L, U]= crout(A)
% Esta funcion calcula la factorizacion LU de A
% mediante el metodo de Crout sin pivoteo.
%  Inicializacion
[n,m] = size(A);
U = eye(n,n);
%  Proceso de EG - haciendo las modificaciones sobre la A
for k = 1:n - 1
    pivo = A(k,k);   % calculo del pivote
    for i = k+1:n
            U(k,i)= A(k,i)/pivo;   % calculo el multiplicador m_ki
```

```
            A(:,i) = A(:,i) - U(k,i)*A(:,k);  % actualizacion de ...
                la columna i
    end
end
L = tril(A);  % tril(A) es la matriz triangular inferior de la A
end

function [x]=sustidir(L,b)
% Resuelve Lx=b donde L es triangular inferior
[m,n]=size(L);
x=zeros(n,1);
for k=1:n
    x(k)=(b(k)-L(k,1:k-1)*x(1:k-1))/L(k,k);
end
end
```

10.2. Laboratorio L2 2022-1

1. Calcule el valor propio y vector propio dominante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 12 & 13 & 11 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

mediante el método de la potencia. Utilice x_0 un vector aleatorio, como iterado inicial. Dé como resultado el error en valor absoluto de la aproximación del valor propio obtenido con respecto al valor exacto (tome como valor exacto $\lambda = 19,182036763331979$).

```
format long
A=[1 2 3 2;2 12 13 11;-2 3 0 2;4 5 7 2]
[lambda,v,iter]=metodo_potencia(A,1e-4,100)
%exacto
lambda_ex=19.182036763331979;
error_absoluto=abs(lambda_ex-lambda)
function [lambda, v, iter] = metodo_potencia(A, tol, max_iter)
    % Metodo de la potencia para encontrar el valor propio ...
        dominante
    % Inputs:
    %   A - Matriz cuadrada
    %   tol - Tolerancia para la convergencia
    %   max_iter - Maximo n mero de iteraciones permitidas
    % Outputs:
    %   lambda - Valor propio dominante
    %   v - Vector propio correspondiente a lambda
```

```
    %   iter - Numero de iteraciones realizadas
    % Inicializaci n
    n = size(A, 1);   % Numero de filas (o columnas) de A
    v = rand(n, 1);   % Vector inicial aleatorio
    v = v / norm(v); % Normalizar el vector inicial
    lambda = 0;       % Valor propio inicial
    lambda_old = inf; % Valor propio anterior para comparaci n
    iter = 0;         % Contador de iteraciones
    % Iteracion del metodo de la potencia
    while abs(lambda - lambda_old) > tol && iter < max_iter
        lambda_old = lambda;
        w = A * v;       % Multiplicar por la matriz
        v = w / norm(w); % Normalizar el vector
        lambda = v' * A * v; % Calcular el valor propio ...
            aproximado
        iter = iter + 1;     % Incrementar contador de ...
            iteraciones
    end
    if iter == max_iter
        warning('El metodo alcanzo el numero maximo de ...
            iteraciones antes de converger.');
    end
end
```

2. Determinar el valor de verdad (V/F) de las siguientes proposiciones:

   a) El vector $\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ es una combinación lineal de los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, y $\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

   b) El conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ es una base para $\mathbb{R}^3$.

   c) Los siguientes vectores

   $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.5 \\ 7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -20 \\ 7 \end{bmatrix}$ son linealmente dependientes.

```
%item1
v1=[1 2 -3]';
v2=[-6 1 -4]';
v3=[8 4 2]';
A=[v1 v2];
r1=rank(A);
r2=rank([A v3]);
r1==r2   %rpta: F
```

```

%item2:basta ver que son l.i
v1=[1;-1;0];
v2=[2;3;1];
v3=[1;1;0];
A=[v1 v2 v3];
r=det(A) %rpta: V

%item3: basta trabajar con el determinante
a1=[1 -1 0 -3]';
a2=[1.5 7 0 3]';
a3=[-1 -1 0 3]';
a4=[-2 1 -20 7]';
r=det([a1 a2 a3 a4]) %rpta :f
```

3. Sea la transformación lineal $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y+2z \\ x-y \end{bmatrix}$. Se sabe que existen infinitos puntos $P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$ tales que $T(P) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Determine uno de tales vectores P con la condición adicional $p_1 + p_2 + p_3 = 10$. Dar como respuesta $p_1 \times p_2 \times p_3$.

```
A= [1 1 2 1;1 -1 0 3]
rref(A)
%y+z = -1, x+z =2
%(x;y;z)=(2-z;-1-z;z)-->1+z=10->z=9, x=-7, y=-10
%rpta:630
```

4. Dados dos vectores linealmente independientes en el espacio $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$, entonces un vector perpendicular a ambos está dado por $P \times Q$ (producto vectorial) en MatLab $P \times Q = cross(P, Q)$. Asimismo, se sabe que el área del triángulo cuyos vértices son $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ y $C = (c_1, c_2, c_3)$ está dado por $Area = \frac{1}{2}||\overline{AB} \times \overline{AC}||$. Dado el triángulo de vértices $A = (2, 5, 3)$, $B = (1, 3, 8)$ y $C = (5, 10, 1)$, halle el área del triángulo proyectado hacia el plano XY.

```
A=[2 5 3]';
B=[1 3 8]';
C=[5 10 1]';
AB=B-A;
AC=C-A;
ABP=[1 0 0;0 1 0;0 0 0]*AB;
```

```
ACP=[1 0 0;0 1 0;0 0 0]*AC;
%area en S
S=0.5*norm(cross(ABP,ACP))
%rpta=0.5
```

5. Encuentre el núcleo de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{bmatrix}.$$

```
%matriz asociada A a la TL
A = [1 1 1; 1 2 3];
B=null(A);
A*B;
```

6. Calcule la multiplicidad algebraica y geométrica del autovalor $\lambda = 2$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

```
A=ones(5,5)+2*diag([1 1 1 1 1])
%polinomio caracteristico
syms x
pol=factor(det(A-x*eye(5)))
%multiplicidad algebraica de 2, es 4.
%hallando la multiplicidad geom trica
mult_geo=null(A-2*eye(5))
%multiplicidad geometrica de 2, es 4.
```

10.3. Laboratorio L1 2022-2

1. Considere el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} 0.001 * 10^{-9} & 0.995 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.995 \\ -35 \end{bmatrix}$$

cuya solución exacta es $x = [4, 1]^T$. Resuelva el sistema usando eliminación gaussiana sin pivoteo. ¿Cuántas cifras significativas tiene su aproximación?

```
S=[0.001*10^-9 0.995; -9 1]
b=[0.995; -35]
[Es,nb]=gauss(S,b)
x=sustireg(Es,nb)
ex=[4;1];
t3=0;
er1=(norm(x-ex)/norm(ex));
while (er1≤5*10^(-t3)) % Complete en lugar de []
    t3=t3+1;
end
cifras=t3-1
%rpta:5
```

2. Sea A la matriz definida por $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 3 \end{bmatrix}$. Realice las siguientes operaciones elementales a la matriz A:

   a) $f_1 \rightleftharpoons f_3$

   b) $f_2 \rightarrow f_2 - 3f_1$

   c) $f_3 \rightarrow f_3 + 2f_1$

   la cual transforma la matriz A en la matriz B. La suma de los elementos de la matriz B es:

```
A4=[1 -3 1 2; 0 0 2 -1 ; 2 4 -3 3]
A4([1 3],:)=A4([3 1],:)
A4(2,:)=A4(2,:)-3*A4(1,:)
A4(3,:)=A4(3,:)+2*A4(1,:)
B4=A4
sumaB=sum(B4, "all")
%rpta:2
```

3. Si $M = \left[m_{ij}\right]$ es una matriz cuadrada de orden $n \times n$ se define la norma-1 de la siguiente manera: $M = \max_{1\leq i\leq n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left|m_{ij}\right|\right\}$. El número de condición de una matriz puede ser calculado usando esta norma. En MatLab, la condición de la matriz M se calcula utilizando la instrucción cond(M, 1). Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 0 & -100 \\ 0 & 100 & -100 \\ -100 & -100 & 300 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1.1 & 8 & -1 \\ -9 & -78.1 & 11 \\ 1 & 17 & 19.8 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 43 & 64 & -42 \\ 42 & 43 & -3 \\ -3 & -906 & 43 \end{bmatrix}$$

ordene (de menor a mayor) las matrices A, B y C según su número de condición.

```
A=[100 0 -100; 0 100 -100; -100 -100 300]
B=[1.1 8 -1; -9 -78.1 11; 1 17 19.8]
C=[43 64 -42; 42 43 -3 ; -3 -906 43]
a=cond(A,1)
b=cond(B,1)
c=cond(C,1)
%rpta:a<c<b
```

4. El siguiente vector es definido en MatLab

$$v = \begin{bmatrix} 23 & 4 & 5 & 2 & 13 & -15 & 14 & 9 & 0.6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Se crean las siguientes matrices:

```
A=[v([1 5:7]);v([4,6:8])]
B=[v([3:5,8])' v([10 6 4 1])']
```

determine el valor de verdad (V o F) de las siguientes proposiciones.

a) $A \times B^t$ existe.

b) $A + B$ existe.

c) $\det(A \times B)$ existe.

```
v=[23 4 5 2 13 -15 14 9 0.6 0 3]

A=[v([1 5:7]);v([4,6:8])]
B=[v([3:5,8])' v([10 6 4 1])']

%u1=A*B' no existe
%u2= A+B no existe
%u3=det(A*B) si existe
```

5. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$2x_1 = x_3 - x_2 - x_4 + 4$$
$$2x_4 = x_1 + x_3 + 5$$
$$2x_1 + x_2 = -x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 1$$

Luego de escribir el sistema en la forma $Ax = b$, donde $x = x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ y utilizando el rango de la matriz ampliada analice la consistencia del sistema mediante el teorema de Rouché-Frobenius.

```
A=[2 1 -1 1;-1 0 -1 2;3 2 -3 4]
b5=[4;5;1]
r1=rank(A) %2
r2=rank([A b5]) %3    inconsistente
```

6. Se muestra en la figura la matriz de Pascal:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{bmatrix}$$

de orden 5, pero podemos tener matrices de Pascal P de orden n, que pueden ser creadas mediante el comando pascal(n). Factorice P en la forma LU de Crout y dé como respuesta la suma de elementos S de la octava fila de L. Considere $n = 9$ y dé como respuesta round(S).

```
format long
n=9;
P=pascal(n);
[L U]=Crout(P)
suma=sum(L(8,:))
rpta=round(suma) %128
```

11. Bibliografía

Chapra S. C. y Canale, R. P. (2019). *Métodos numéricos para ingenieros* (7ª ed.). McGraw-Hill Interamericana.

Haeussler Jr., E. F., Paul, R. S. y Wood, R. J. (2023). *Matemáticas para administración y economía* (13ª ed.). Pearson Educación.

Kolman, B. y Hill, D. R. (2010). *Álgebra lineal* (8ª ed.). Pearson Educación.

Lay, D. C. (2022). *Álgebra lineal y sus aplicaciones* (5ª ed.). Pearson Educación.

Leiva G. A. y Toloza, M. C. (2009). *Aproximación al álgebra lineal: un enfoque geométrico*. Ediciones UIS.

Martínez, H. J. (2023). *Álgebra lineal*. IDOC.PUB. https://idoc.pub/documents/algebra-lineal-hector-jairo-martinez-1430zyrwk94j

Valle Sotelo, J. C. del (2017). *Álgebra lineal y aplicaciones* (5ª ed.). Grupo Editorial Patria.

Zill, D. G. (2019). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado* (10ª ed.). Cengage Learning.

Álgebra lineal: fundamentos y aplicaciones prácticas con MatLab es resultado de la colaboración entre Hermes Pantoja, Brígida Molina, Rosa Jabo y Rósulo Pérez, profesores de matemática aplicada de la UTEC, y Víctor Anhuaman, experto en MatLab. Su contenido se plasmó en el dictado del curso de Álgebra Lineal y está destinado a estudiantes de ingeniería y disciplinas afines. La obra integra, con acierto, el rigor conceptual del álgebra lineal y su aplicación práctica a través del uso del *software* MatLab.

Entre sus principales ventajas se puede destacar, en primer lugar, una cobertura técnica completa, que explora, en profundidad, los conceptos clave del álgebra lineal, con inclusión de sistemas de ecuaciones lineales, matrices, determinantes, espacios y vectoriales, y autovalores y autovectores; en segundo lugar, aplicaciones en ingeniería en cada capítulo, que muestran cómo el álgebra lineal es una aproximación fundamental para resolver problemas reales en diversas ramas de la ingeniería; en tercer lugar, el uso de MatLab con instrucciones claras y ejemplos detallados; y, finalmente, una amplia colección de ejercicios resueltos y propuestos, con respuestas incluidas, para reforzar el aprendizaje y permitir a los estudiantes practicar y verificar su comprensión de los temas tratados.

Se trata, más que de un texto académico, de una guía completa que equipa a los estudiantes con las habilidades teóricas y prácticas necesarias para enfrentar los desafíos de la ingeniería moderna. Con su enfoque dual en teoría y práctica, este libro se convierte en una herramienta indispensable para cualquier estudiante de ingeniería.

UTEC
PRESS

ISBN: 978-612-48515-8-2
9 786124 851582